

# ANNEXE Isomorphisme de Wang et isomorphisme de Leray

Objektyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

(notamment dans le point (ii) du lemme 9.2). Enfin, l'utilisation d'un pinceau d'axe ne passant pas par l'origine donnera une situation qui n'est pas purement locale mais seulement semi-locale qu'il faudra donc traiter soigneusement.

## ANNEXE

## ISOMORPHISME DE WANG ET ISOMORPHISME DE LERAY

Dans cette annexe, nous donnons une justification sommaire de l'existence et des propriétés des isomorphismes de Wang et de Leray que nous avons utilisés aux §§4 et 5.

## 1°. ISOMORPHISME DE WANG

Hsien-Chung Wang a donné pour tout fibré localement trivial sur une  $q$ -sphère des isomorphismes reliant l'homologie relative de l'espace total modulo une fibre à l'homologie de cette fibre (cf. [Wg]). Nous nous contenterons ici du cas particulier  $q = 1$ . Soit donc

$$\pi: E \rightarrow C$$

un fibré localement trivial topologique sur un cercle. Soit  $c \in C$  et posons

$$E_c = \pi^{-1}(c).$$

Fixons une orientation de  $C$ . On a alors, pour tout  $k$ , l'*isomorphisme de Wang*

$$(A.1) \quad \nu_{E,k}: H_{k-1}(E_c) \xrightarrow{\sim} H_k(E, E_c)$$

associé à cette orientation de  $C$  et portant sur les groupes d'homologie singulière à coefficients entiers, avec la convention  $H_{k-1}(E_c) = 0$  pour  $k < 1$ . Nous allons indiquer comment on peut définir  $\nu_{E,k}$  mais en même temps nous montrerons que l'isomorphisme de Wang se comporte naturellement par rapport aux *sous-fibrés* (au sens que nous avons précisé à la fin du §3), c'est-à-dire que, si  $E'$  est un sous-fibré de  $E$  avec  $E'_c$  comme fibre au-dessus de  $c$ , l'isomorphisme  $\nu_{E',k}$  le concernant (pour la même orientation de  $C$ ) fait commuter le diagramme

$$(A.2) \quad \begin{array}{ccc} H_{k-1}(E_c) & \xrightarrow{\nu_{E,k}} & H_k(E, E_c) \\ \uparrow & \curvearrowright & \uparrow \\ H_{k-1}(E'_c) & \xrightarrow{\nu_{E',k}} & H_k(E', E'_c) \end{array}$$

où les flèches verticales sont induites par inclusion.

Ce que nous allons faire ressemble à [La] 6.4 et correspond d'autre part à la description informelle que nous avons donnée au §4 (cf. fig. 4.1). Soit  $\omega: [0, 1] \rightarrow C$  un lacet basé en  $c$  et dont la classe d'homotopie engendre  $\pi_1(C, c)$ . L'espace topologique  $E$  peut être obtenu à partir de  $E_c \times [0, 1]$  en recollant  $E_c \times \{1\}$  à  $E_c \times \{0\}$  au moyen d'un homéomorphisme caractéristique. Plus précisément, si  $\omega^*$  est un lacet simple de  $C$  homotope à  $\omega$ , on peut, en

recollant de proche en proche des trivialisations locales simultanées de  $E$  et  $E'$  le long de  $\omega^*$ , montrer l'existence d'un morphisme de fibrés

$$G: E_c \times [0, 1] \rightarrow E$$

au-dessus de  $\omega^*: [0, 1] \rightarrow C$  tel que:

- (i)  $G(x, 0) = x$  pour tout  $x \in E_c$ ,
- (ii)  $G(E'_c \times \{t\}) = E' \cap \pi^{-1}(\omega^*(t))$  pour tout  $t \in [0, 1]$ ,
- (iii)  $G$  induit des homéomorphismes  $E_c \times [0, 1/2] \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(\omega^*([0, 1/2]))$   
et  $E_c \times [1/2, 1] \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(\omega^*([1/2, 1]))$ .

L'homéomorphisme caractéristique dont nous avons parlé est alors l'application

$$(x, 1) \mapsto (G(x, 1), 0)$$

et l'espace quotient de  $E_c \times [0, 1]$  obtenu par ce recollement s'envoie homéomorphiquement sur  $E$  en passant au quotient dans  $G$ . Il est classique dans la théorie des espaces obtenus par adjonction (cf. [Gb] chap. 19), de voir que dans ces conditions  $G$  induit, pour tout  $k$ , un isomorphisme

$$(A.3) \quad \bar{G}_k: H_k(E_c \times [0, 1], E_c \times \{0, 1\}) \xrightarrow{\sim} H_k(E, E_c)$$

pourvu que  $E_c \times \{0, 1\}$  soit rétracte fort par déformation d'un voisinage dans  $E_c \times [0, 1]$ , ce qui est bien le cas. Les isomorphismes (A.3) restent en fait inchangés si l'on prend à la place de  $\omega^*$  un autre lacet  $\omega^{**}$  de  $C$  homotope à  $\omega$  mais pas forcément simple et à la place de  $G$  un morphisme  $K$  de fibrés au-dessus de  $\omega^{**}$  satisfaisant seulement à la condition (i); en effet, le fibré localement trivial  $E$  ayant une base compacte, possède la propriété de relèvement des homotopies et on peut donc trouver, au-dessus d'une homotopie  $h$  de  $\omega^*$  vers  $\omega^{**}$ , une homotopie  $H$  de  $G$  vers  $K$  qui vérifie la condition  $H(E_c \times \{0, 1\} \times [0, 1]) \subset E_c$  (cf. [Sp] 2.7.14 et 2.8.10). Les isomorphismes (A.3) sont donc entièrement déterminés par le choix de l'orientation sur  $C$ .

Maintenant, la formule de Künneth appliquée au produit  $E_c \times ([0, 1], \{0, 1\})$  donne, pour tout  $k$ , un isomorphisme

$$H_{k-1}(E_c) \otimes H_1([0, 1], \{0, 1\}) \xrightarrow{\sim} H_k(E_c \times [0, 1], E_c \times \{0, 1\})$$

qui à tout élément décomposable  $z \otimes \bar{u}$  fait correspondre  $z \times \bar{u}$ , produit-croix homologique de  $z$  par  $\bar{u}$ . Le groupe  $H_1([0, 1], \{0, 1\})$  étant libre sur le générateur privilégié

$$\bar{a}_0 \in H_1([0, 1], \{0, 1\}) \quad \text{classe du cycle relatif singulier } \text{Id}_{[0, 1]},$$

on obtient alors l'isomorphisme

$$H_{k-1}(E_c) \xrightarrow{\sim} H_k(E_c \times [0, 1], E_c \times \{0, 1\})$$

$$z \mapsto z \times \bar{a}_0 .$$

En composant cet isomorphisme avec l'isomorphisme (A.3) on aboutit à une expression explicite de l'isomorphisme de Wang  $v_{E, k}$  que nous voulons définir:

$$(A.4) \quad \begin{aligned} v_{E,k}: H_{k-1}(E_c) &\xrightarrow{\sim} H_k(E, E_c) \\ z &\mapsto \bar{G}_k(z \times \bar{a}_0), \end{aligned}$$

expression qui, nous l'avons vu, ne dépend que de l'orientation choisie sur  $C$ .

D'autre part, si nous prenons  $G$  satisfaisant aux conditions (i), (ii) et (iii) ci-dessus, sa restriction à  $E'_c \times [0, 1]$  induit une application

$$G': E'_c \times [0, 1] \rightarrow E'$$

qui a les mêmes propriétés vis-à-vis de  $E'$  que  $G$  vis-à-vis de  $E$ . L'isomorphisme de Wang  $v_{E',k}$  pour  $E'$  associé à la même orientation de  $C$  s'exprime donc par la formule (A.4) avec  $G'$  à la place de  $G$  et la commutativité du diagramme (A.2) résulte alors de la naturalité du produit-croix homologique (cf. [Sp] 5.3.11).

Nous examinons maintenant le cas d'un *fibré trivial* où  $E = F \times C$  et où  $\pi$  est la projection sur le second facteur. Nous allons montrer que l'isomorphisme de Wang  $v_{E,k}$  se réduit alors à un produit-croix

$$(A.5) \quad v_{E,k}(z^\#) = z \times [\omega]_{(C, \{c\})} \quad \text{pour } z \in H_{k-1}(F),$$

où  $[\omega]_{(C, \{c\})}$  désigne la classe d'homologie dans  $H_1(C, \{c\})$  de  $\omega$  considéré comme 1-simplexe (cycle) singulier relatif de  $C$  modulo  $\{c\}$  et  $z^\#$  désigne l'élément correspondant à  $z$  dans l'isomorphisme  $H_{k-1}(F) \xrightarrow{\sim} H_{k-1}(E_c)$  induit par l'identification canonique de  $F$  à  $E_c = F \times \{c\}$ .

On peut, en effet, user de la latitude que nous avons signalée dans la construction de Wang pour le choix du morphisme de fibrés et appliquer la formule (A.4) à  $v_{E,k}$  avec, à la place de  $G$ , le morphisme trivial de fibrés au-dessus de  $\omega$

$$\begin{aligned} E_c \times [0, 1] &\rightarrow F \times C \\ ((x, c), t) &\mapsto (x, \omega(t)). \end{aligned}$$

Ce morphisme satisfait à la condition (i) ci-dessus, ce qui, nous l'avons vu, est suffisant. On obtient alors la formule (A.5).

Enfin, il résulte de la formule (A.4) et de la formule donnant le bord d'un produit-croix (cf. [Sp] 5.3.15) que, si  $\partial: H_k(E, E_c) \rightarrow H_{k-1}(E_c)$  est l'homomorphisme bord, on a

$$(A.6) \quad \partial \circ v_{E,k} = (-1)^{k-1} (\theta_{k-1} - \text{Id}_{H_{k-1}(E_c)}),$$

où  $\theta_{k-1}$  est la monodromie en homologie de rang  $k-1$  au-dessus de  $\omega$ .

On retrouve donc bien les isomorphismes (4.8) utilisés au §4 et leurs propriétés (4.9), (4.10) et (4.11).

## 2°. ISOMORPHISME DE LERAY

Nous avons utilisé au §5 la version en homologie singulière à coefficients entiers d'un isomorphisme envisagé par Jean Leray dans la définition de son opération «cobord» (cf. [Lr] chap. II, n° 19). Nous l'avons fait sous les conditions données par le lemme 5.5 qui permettent d'avoir les isomorphismes (5.6) et leurs propriétés de naturalité (5.7) et de réduction à un produit-croix dans le cas trivial (5.8). Nous allons les justifier sommairement sous des hypothèses en fait plus générales.

On a, pour tout  $k$ , un *isomorphisme de Leray*

$$(A.7) \quad \tau_{X, Y, k}: H_{k-N}(Y) \xrightarrow{\sim} H_k(X, X \setminus Y)$$

(avec la convention  $H_{k-N}(Y) = 0$  pour  $k < N$ ), toutes les fois qu'on est en présence d'un couple  $(X, Y)$  où  $X$  est une variété réelle de classe  $C^\infty$  séparée paracompacte orientée et où  $Y$  est une sous-variété orientée fermée de  $X$  de codimension pure  $N$ . Le point (i) du lemme 5.5 donne bien des conditions suffisantes de validité avec  $N = 2$  puisque les variétés analytiques complexes ont une structure sous-jacente de variété réelle de classe  $C^\infty$  canoniquement orientée et que la codimension réelle d'une sous-variété est égale au double de sa codimension complexe.

Nous allons voir que l'isomorphisme de Leray peut être déduit de l'*isomorphisme de Thom* pour un voisinage tubulaire orienté de  $Y$  dans  $X$  (cf. [Th1]). Avec les hypothèses que nous avons faites sur  $X$ , il existe effectivement un voisinage tubulaire  $T$  de classe  $C^\infty$  de  $Y$  dans  $X$  (cf. [Ma] proposition 6.2). Un tel *voisinage tubulaire* consiste en un triplet

$$T = (\pi: E \rightarrow Y, \varepsilon, \psi)$$

formé de:

- un fibré euclidien  $\pi: E \rightarrow Y$  de classe  $C^\infty$  sur  $Y$ ;
- une fonction numérique  $\varepsilon: Y \rightarrow ]0, \infty[$  de classe  $C^\infty$ ;
- un difféomorphisme  $\psi: B_\varepsilon(E) \rightarrow |T|$  où
  - $B_\varepsilon(E)$  est le voisinage ouvert de rayon  $\varepsilon$  de la section nulle de  $E$ ,
  - $|T|$  est un voisinage ouvert de  $Y$  dans  $X$ ,

difféomorphisme qui, sur cette section nulle identifiée à  $Y$ , coïncide avec l'identité de  $Y$ .

On définit aussi la *projection tubulaire* de  $T$ :

$$\begin{aligned} \pi_T: |T| &\rightarrow Y \\ x &\mapsto \pi(\psi^{-1}(x)) . \end{aligned}$$

Cette projection tubulaire est à la fois une rétraction sur  $Y$  et une fibration localement triviale de classe  $C^\infty$  en boules ouvertes; la dimension de ces boules est  $N = \dim_y X - \dim_y Y$  pour tout  $y \in Y$ . On peut, de plus, grâce aux orientations de  $Y$  et  $X$ , avoir une orientation en tant que fibré de ce fibré localement trivial; on a, en effet, la relation entre espaces tangents

$$T_y X = T_y Y \oplus T_y(\pi_T^{-1}(y)) \quad \text{pour } y \in Y$$

qui permet d'orienter de manière non ambiguë et localement cohérente les fibres; nous dirons aussi que c'est l'*orientation du voisinage tubulaire  $T$  déduite des orientations de  $Y$  et  $X$* . Comme la base du fibré  $\pi_T: |T| \rightarrow Y$  est séparée paracompacte, il existe alors une unique classe d'orientation cohomologique associée à l'orientation de ce fibré, à savoir un élément

$$\bar{Z}_T \in H^N(|T|, |T| \setminus Y)$$

dont la restriction à chaque fibre  $\pi_T^{-1}(y)$  donne le générateur de

$$H^N(\pi_T^{-1}(y), \pi_T^{-1}(y) \setminus \{y\})$$

compatible avec l'orientation qui a été définie sur  $\pi_T^{-1}(y)$  (on peut se ramener à  $E$  par  $\psi^{-1}$  suivi d'une excision et appliquer [Di3] (24.39.6) et (24.39.10)). Nous dirons que c'est la *classe d'orientation cohomologique de  $T$  déduite des orientations de  $Y$  et  $X$* . Pour ce voisinage tubulaire orienté, on a alors, pour tout  $k$ , l'isomorphisme de Thom:

$$(A.8) \quad \begin{aligned} \varphi_{T,k}: H_k(|T|, |T \setminus Y|) &\xrightarrow{\sim} H_{k-N}(Y) \\ \bar{z} &\mapsto (\pi_T)_{k-N}(\bar{Z}_T \frown \bar{z}), \end{aligned}$$

où  $\bar{Z}_T \frown \bar{z}$  désigne le produit-chapeau de  $\bar{Z}_T$  par  $\bar{z}$  et  $(\pi_T)_{k-N}: H_{k-N}(|T|) \rightarrow H_{k-N}(Y)$  est induit par  $\pi_T$ , étant entendu que  $H_{k-N}(Y) = 0$  pour  $k < N$  (cf. [Sp] theorem 5.7.10 à la situation duquel on peut se ramener en transitant par le sous-fibré en sphères de rayon  $\varepsilon$  de  $E$ ).

Maintenant, comme nous avons supposé  $Y$  fermée, on a aussi l'isomorphisme

$$H_k(|T|, |T \setminus Y|) \xrightarrow{\sim} H_k(X, X \setminus Y)$$

induit par inclusion, obtenu en excisant le fermé  $X \setminus |T|$  de  $X$  dans l'ouvert  $X \setminus Y$ . En composant cet isomorphisme avec  $(\varphi_{T,k})^{-1}$ , on obtient alors un isomorphisme

$$\tau_{T,k}: H_{k-N}(Y) \xrightarrow{\sim} H_k(X, X \setminus Y)$$

qui, compte tenu de l'interprétation géométrique de l'isomorphisme de Thom, correspond à la description informelle que nous avons donnée au §5 pour l'isomorphisme de Leray (cf. fig. 5.1). Mais il faut s'assurer qu'il est intrinsèque au couple  $(X, Y)$ , c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du voisinage tubulaire  $T$  choisi comme intermédiaire.

Nous allons voir que cette indépendance peut être déduite du théorème d'unicité à isotopie près pour les voisinages tubulaires (cf. [Ma] proposition 6.1). Soit, en effet,  $T'$  un autre voisinage tubulaire de classe  $C^\infty$  de  $Y$  dans  $X$ . D'après ce théorème, il existe une isotopie

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow X$$

de classe  $C^\infty$  laissant fixes les points de  $Y$ , qui part de l'identité de  $X$  et qui aboutit à un difféomorphisme  $g$  de  $X$  possédant les propriétés suivantes:

(i) il existe, comme pour tout autre difféomorphisme de  $X$  laissant fixes les points de  $Y$ , un voisinage tubulaire  $g_*(T)$  de classe  $C^\infty$  de  $Y$  dans  $X$ , dit *image directe de  $T$  par  $g$* , vérifiant

$$\begin{aligned} |g_*(T)| &= g(|T|) \quad \text{et} \\ \pi_{g_*(T)}(g(x)) &= \pi_T(x) \quad \text{pour tout } x \in |T|; \end{aligned}$$

mais aussi

(ii)  $g_*(T)$  est «équivalent» à  $T'$ , notion qui implique qu'il existe un autre voisinage tubulaire  $U$  de classe  $C^\infty$  de  $Y$  dans  $X$  tel que

$$\begin{aligned} |U| &\subset |g_*(T)| \cap |T'| \quad \text{et} \\ \pi_{g_*(T)}||U| &= \pi_{T'}||U| = \pi_U. \end{aligned}$$

On peut alors voir en deux étapes que les isomorphismes de Leray  $\tau_{T,k}$  et  $\tau_{T',k}$  correspondant à  $T$  et  $T'$  sont les mêmes:

Pour commencer, on vérifie que les classes d'orientation cohomologiques  $\bar{Z}_{g_*(T)}$  et  $\bar{Z}_{T'}$  pour  $g_*(T)$  et  $T'$  déduites des orientations de  $Y$  et  $X$  ont une restriction à  $(|U|, |U| \setminus Y)$  égale à la classe d'orientation  $\bar{Z}_U$  pour  $U$ . La naturalité du produit-chapeau (cf. [Sp] 5.6.16) implique alors que les isomorphismes de Leray correspondant à ces trois voisinages tubulaires sont les mêmes, c'est-à-dire que  $\tau_{U,k} = \tau_{g_*(T),k} = \tau_{T',k}$ .

Ensuite, on voit que  $g$  induit un isomorphisme au-dessus de l'identité entre les fibrés  $\pi_T: |T| \rightarrow Y$  et  $\pi_{g_*(T)}: |g_*(T)| \rightarrow Y$  qui préserve leur orientation comme fibré déduit des orientations de  $Y$  et  $X$ , car  $g$  laisse fixe  $Y$  et, étant isotope à l'identité de  $X$ , préserve l'orientation de  $X$ . Il en résulte que  $g$  induit un isomorphisme

$$H^N(|g_*(T)|, |g_*(T)| \setminus Y) \xrightarrow{\sim} H^N(|T|, |T| \setminus Y)$$

qui transforme  $\bar{Z}_{g_*(T)}$  en  $\bar{Z}_T$ . La naturalité du produit-chapeau donne alors que  $\tau_{g_*(T),k}$  est égal à  $\tau_{T,k}$  suivi de l'isomorphisme  $H_k(X, X \setminus Y) \xrightarrow{\sim} H_k(X, X \setminus Y)$  induit en homologie par  $g$ . Mais comme  $g$  est isotope à l'identité par une isotopie préservant  $X \setminus Y$ , ce dernier isomorphisme est égal à l'identité. On trouve donc que  $\tau_{g_*(T),k} = \tau_{T,k}$ .

Avec l'étape précédente, cela montre que  $\tau_{T,k} = \tau_{T',k}$  et leur valeur commune est donc un isomorphisme

$$\tau_{X,Y,k}: H_{k-N}(Y) \xrightarrow{\sim} H_k(X, X \setminus Y)$$

intrinsèque au couple  $(X, Y)$  qui est l'isomorphisme de Leray (A.7).

Remarquons que ce qui précède montre aussi que les classes d'orientation cohomologiques déduites des orientations de  $Y$  et  $X$  pour les différents voisinages tubulaires de classe  $C^\infty$  de  $Y$  dans  $X$  sont les restrictions d'un même générateur  $\bar{Z} \in H^N(X, X \setminus Y)$  auquel elles correspondent par excision. Remarquons, d'autre part, que l'orientation d'un voisinage tubulaire  $T$  de  $Y$  dans  $X$ , déduit des orientations de  $Y$  et  $X$ , donne une orientation du fibré normal de  $Y$  relativement à  $X$  grâce à l'isomorphisme canonique de  $T_y(\pi_T^{-1}(y))$  avec  $T_y X / T_y Y$  pour  $y \in Y$ : la cohérence locale des orientations des  $T_y X / T_y Y$  est assurée par celle des  $T_y(\pi_T^{-1}(y))$ . Mais n'importe quel autre supplémentaire de  $T_y Y$  dans  $T_y X$ , orienté de manière compatible avec  $T_y Y$  et  $T_y X$ , donne la même orientation sur  $T_y X / T_y Y$ . Cette orientation du fibré normal ne dépend donc pas du voisinage tubulaire  $T$  choisi comme intermédiaire et nous dirons que c'est *l'orientation du fibré normal de  $Y$  relativement à  $X$  déduite des orientations de  $Y$  et  $X$* . Le générateur  $\bar{Z}$  est donc en fait déterminé par cette orientation du fibré normal.

Nous en venons maintenant à la question de la naturalité de l'isomorphisme de Leray, qui n'a évidemment de sens que grâce à son caractère intrinsèque. Soit donc  $(X, Y)$  un couple satisfaisant comme ci-dessus aux conditions de validité de l'isomorphisme de Leray (A.7). Supposons que  $X'$  soit une sous-variété orientée fermée de  $X$  transverse à  $Y$  dans  $X$  et posons  $Y' = X' \cap Y$ . Constatons alors, qu'en raison de l'hypothèse de transversalité,  $Y'$  est une sous-variété fermée de codimension pure  $N$  dans  $X'$ . Constatons aussi que  $X'$  est séparée paracompacte puisque, nous l'avons vu, cette propriété se transmet de  $X$  à ses sous-variétés. Il ne manque donc qu'une orientation sur  $Y'$  pour que le couple  $(X', Y')$  satisfasse aux conditions de validité de l'isomorphisme de Leray. Nous allons voir que  $Y'$  peut effectivement être orientée et que, si on le fait de manière convenable, l'isomorphisme de Leray pour le couple  $(X', Y')$  se comporte naturellement par rapport à l'isomorphisme de Leray pour le couple  $(X, Y)$ . Pour cela, le choix de l'orientation sur  $Y'$  doit être tel que les orientations de  $Y'$  et  $X'$  satisfassent vis-à-vis des orientations de  $Y$  et  $X$  à une condition de cohérence naturelle:

Cette condition porte sur les orientations des fibrés normaux  $\mathcal{N}'$  de  $Y'$  relativement à  $X'$  et  $\mathcal{N}$  de  $Y$  relativement à  $X$ . Une orientation de  $Y'$  déterminerait, nous l'avons vu, une orientation de  $\mathcal{N}'$  en tant que fibré, déduite des orientations de  $Y'$  et  $X'$ . Nous avons, par ailleurs, une orientation de  $\mathcal{N}$  déduite de celles de  $Y$  et  $X$ . Or  $\mathcal{N}'$  peut aussi être retrouvé comme fibré induit par  $\mathcal{N}$  au-dessus de  $Y'$ . Cela est possible grâce à la transversalité de  $X'$  à  $Y$  dans  $X$  qui permet une identification canonique de  $\mathcal{N}'$  à ce fibré induit. Cette transversalité implique, en effet, les égalités

$$T_{y'}X' + T_{y'}Y = T_{y'}X; \quad T_{y'}Y' = T_{y'}X' \cap T_{y'}Y \quad \text{pour } y' \in Y'$$

et les fibres au-dessus de  $y'$  de  $\mathcal{N}'$  et  $\mathcal{N}$  sont alors respectivement  $T_{y'}X'/T_{y'}X' \cap T_{y'}Y$  et  $T_{y'}X/T_{y'}Y$  qui s'identifient canoniquement en passant au quotient dans l'injection canonique de  $T_{y'}X'$  dans  $T_{y'}X$ . Cette identification canonique de  $\mathcal{N}'$  au fibré induit par  $\mathcal{N}$  au-dessus de  $Y'$  donne une seconde orientation de  $\mathcal{N}'$  obtenue en y transportant celle de  $\mathcal{N}$ . La condition de cohérence qu'on peut alors naturellement exiger est que les deux orientations en question sur  $\mathcal{N}'$  coïncident. Mais il est toujours possible d'orienter  $Y'$  de façon à satisfaire à cette condition de cohérence. En effet, on commence par orienter  $\mathcal{N}'$  de la seconde manière, grâce à l'orientation de  $\mathcal{N}$ . On peut ensuite obtenir, à partir des orientations de  $\mathcal{N}'$  comme fibré et de  $X'$  comme variété, une orientation du fibré tangent de  $Y'$  par la procédure inverse de celle qui nous a permis, ci-dessus, d'orienter un fibré normal à partir des orientations des variétés constitutives. On aboutit ainsi à une orientation de  $Y'$  qui satisfait à la condition de cohérence voulue et qui est la seule à pouvoir la satisfaire. Nous munissons donc  $Y'$  de cette orientation bien déterminée dont nous dirons que c'est *l'orientation de  $Y'$  qui est cohérente avec celle de  $X'$  par rapport à celles de  $Y$  et  $X$* .

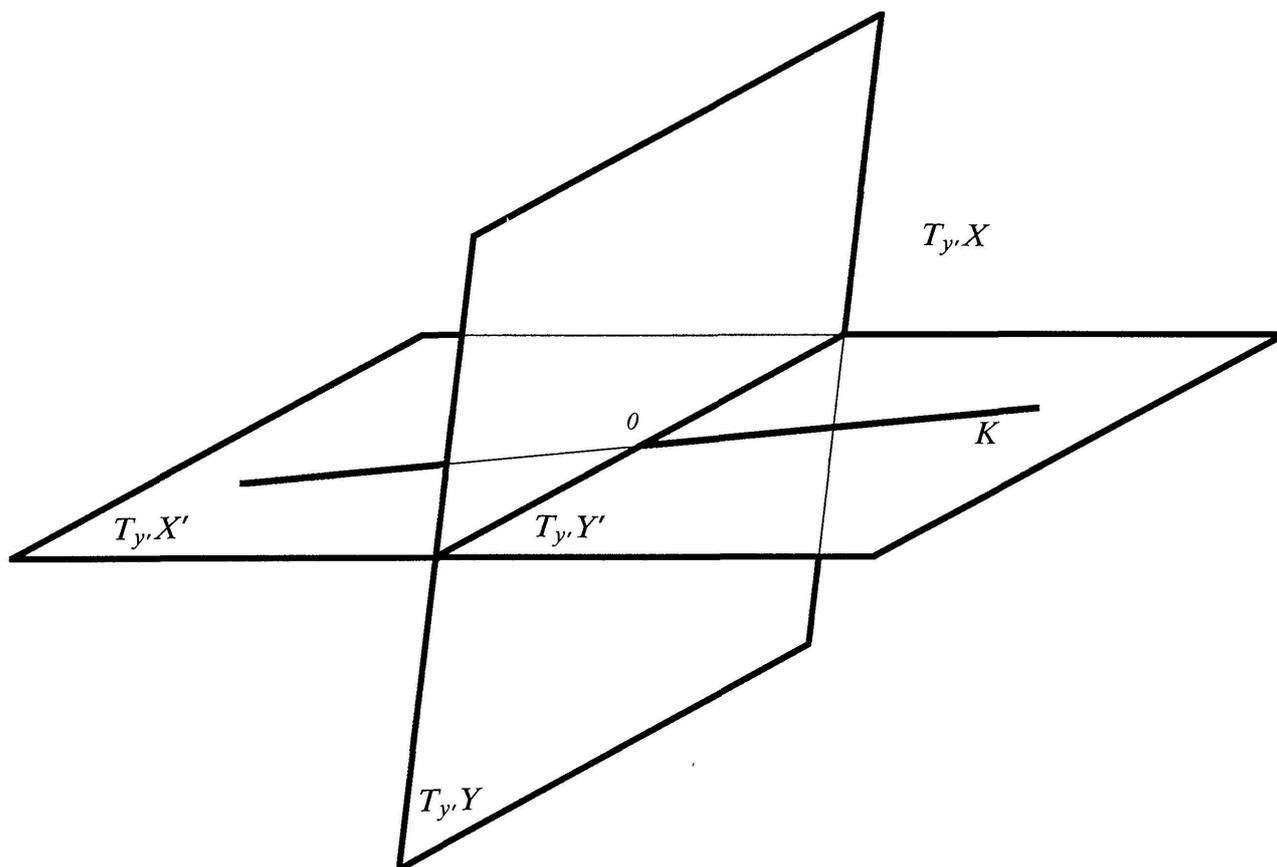


FIGURE A.1

On peut donner une description géométrique assez simple de l'orientation qui en résulte pour les espaces tangents  $T_{y'} Y'$ : Soit  $K$  un supplémentaire de  $T_{y'} Y'$  dans  $T_{y'} X'$  (cf. fig. A.1). C'est aussi un supplémentaire de  $T_{y'} Y$  dans  $T_{y'} X$ . Les orientations de  $T_{y'} Y$  et  $T_{y'} X$  déterminent, par compatibilité, une orientation de  $K$  et alors, les orientations de  $K$  et  $T_{y'} X'$  déterminent l'orientation voulue sur  $T_{y'} Y'$ .

Sous les hypothèses faites concernant  $X'$  et avec l'orientation sur  $Y' = X' \cap Y$  définie ci-dessus, l'isomorphisme de Leray  $\tau_{X', Y', k}$  pour le couple  $(X', Y')$  se comporte naturellement par rapport à l'isomorphisme de Leray  $\tau_{X, Y, k}$  pour le couple  $(X, Y)$ , ce qui veut dire que le diagramme suivant, où les flèches verticales sont induites par inclusion, est commutatif:

$$(A.9) \quad \begin{array}{ccc} H_{k-N}(Y) & \xrightarrow{\tau_{X, Y, k}} & H_k(X, X \setminus Y) \\ \uparrow & \hookrightarrow & \uparrow \\ H_{k-N}(Y') & \xrightarrow{\tau_{X', Y', k}} & H_k(X', X' \setminus Y') \end{array}$$

Avant d'esquisser une justification de cette propriété, notons que le point (ii) du lemme 5.5 en donne bien des conditions suffisantes de validité. Autrement dit, si  $(X, Y)$  est un couple composé d'une variété analytique complexe séparée paracompacte et d'une sous-variété fermée de codimension pure (pas forcément égale à 1) et si  $(X', Y')$  est un autre couple formé d'une sous-variété fermée de  $X$  transverse à  $Y$  dans  $X$  et de son intersection avec  $Y$ , alors les variétés réelles canoniquement orientées sous-jacentes vérifient les hypothèses formulées ci-dessus pour la validité de (A.9). Pour voir cela, commençons par remarquer que les espaces tangents aux variétés réelles sous-jacentes sont les espaces vectoriels réels sous-jacents aux espaces tangents complexes. La transversalité de  $X'$  à  $Y$  au sens complexe est donc équivalente à sa transversalité au sens réel. Il reste maintenant à s'assurer que les orientations canoniques de  $Y'$  et  $X'$  satisfont bien à la condition de cohérence voulue vis-à-vis des orientations canoniques de  $Y$  et  $X$ . Or ce que nous avons dit sur les espaces tangents implique aussi que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  (avec les notations ci-dessus) sont les fibrés réels sous-jacents aux fibrés normaux complexes. Ils ont donc une orientation canonique en tant que fibrés qui induit sur chaque fibre son orientation canonique. Mais ces orientations de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  sont précisément celles que nous avons dit être déduites des orientations canoniques de  $Y$  et  $X$  d'une part et de  $Y'$  et  $X'$  d'autre part. En effet, nous avons vu que pour orienter de cette manière une fibre  $T_y X / T_y Y$  de  $\mathcal{A}$ , par exemple, on pouvait se servir de n'importe quel supplémentaire  $F_y$  de  $T_y Y$  dans  $T_y X$  qu'on orientait de manière compatible avec  $T_y Y$  et  $T_y X$ . Mais si l'on choisit pour  $F_y$  un supplémentaire de  $T_y Y$  pour les structures d'espaces vectoriels complexes, c'est son orientation canonique qui est compatible avec celles de  $T_y Y$  et  $T_y X$ . L'isomorphisme par lequel on la transporte à  $T_y X / T_y Y$  étant aussi un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes, on aboutit bien à l'orientation canonique de  $T_y X / T_y Y$ . Il nous reste maintenant à voir que l'orientation canonique de  $\mathcal{A}'$  est la même que celle qu'on obtient en y transportant l'orientation canonique de  $\mathcal{A}$  au moyen de l'identification de  $\mathcal{A}'$  au fibré induit par  $\mathcal{A}$  au-dessus de  $Y'$ . Mais cela est bien le cas car cette identification, que nous avons explicitée, se fait au moyen d'un isomorphisme canonique des fibres valable aussi pour les structures complexes.

La propriété de naturalité que nous avons énoncée en (A.9) résulte de deux faits essentiels. En premier lieu, l'isomorphisme de Thom (A.8) pour le fibré orienté  $\pi_T: |T| \rightarrow Y$  se comporte naturellement par rapport aux fibrés orientés induits au-dessus de sous-ensembles de la base: cela est une conséquence immédiate de la naturalité du produit-chapeau. En second lieu, nous verrons qu'on peut choisir un voisinage tubulaire  $T$  de classe  $C^\infty$  de  $Y$  dans  $X$  qui soit en bonne position par rapport à  $X'$ . «En bonne position» signifie que  $\pi_T^{-1}(Y') \subset X'$ , ce qui permet d'avoir un voisinage tubulaire  $T'$  de classe  $C^\infty$  de  $Y'$  dans  $X'$  tel que  $\pi_{T'}^{-1}(Y') = |T'|$  et tel que  $\pi_T$  coïncide avec  $\pi_{T'}$  sur  $|T'|$ . Avec cette configuration, en effet,  $\pi_{T'}: |T'| \rightarrow Y'$  est le fibré induit au-dessus  $Y'$  par  $\pi_T: |T| \rightarrow Y$ . De plus, l'orientation de  $\pi_{T'}: |T'| \rightarrow Y'$  (déduite des orientations de  $Y'$  et  $X'$ ) est bien induite par l'orientation de  $\pi_T: |T| \rightarrow Y$  (déduite de celles de  $Y$  et  $X$ ). Cela résulte de la condition de cohérence entre les orientations des fibrés normaux de  $Y'$  relativement à  $X'$  et de  $Y$  relativement à  $X$  que nous avons formulée plus haut et en vue de laquelle nous avons précisément choisi l'orientation de  $Y'$ . On peut, dans ces conditions, utiliser la naturalité de l'isomorphisme de Thom et en déduire la naturalité de l'isomorphisme de Leray. Il nous reste à justifier la possibilité de choisir  $T$  en «bonne position».

Pour que  $T$  soit en bonne position par rapport à  $X'$ , il suffit qu'il soit «compatible» avec une rétraction  $r$  d'un voisinage ouvert  $\Omega$  de  $Y$  dans  $X$  telle que  $r^{-1}(Y') \subset X'$ , cette compatibilité voulant dire que  $|T| \subset \Omega$  et que  $r$  est constante sur les fibres de  $\pi_T$  (en fait  $\pi_T$  est alors égale à  $r|_{|T|}$ ). Or, étant donnée une application de classe  $C^\infty$  définie sur  $\Omega$  et dont la restriction à  $Y$  est submersive, l'existence d'un voisinage tubulaire de classe  $C^\infty$  de  $Y$  dans  $\Omega$  compatible avec cette application est assurée par le théorème fort d'existence de voisinages tubulaires de Mather (cf. [Ma] proposition 6.2; l'assertion de compatibilité a été oubliée dans l'énoncé mais peut être restituée d'après la démonstration). On est donc ramené à l'existence d'une rétraction de classe  $C^\infty$  qui soit comme la rétraction  $r$  ci-dessus.

Il est assez délicat d'établir cette existence: cela est clair localement grâce à la transversalité de  $X'$  à  $Y$  dans  $X$  mais il y a des difficultés de recollement; la chose n'est d'ailleurs pas possible si on ne suppose pas  $X'$  fermée. Disons seulement qu'en se limitant à une composante connexe de  $X$ , on peut recouvrir  $Y$  par une famille dénombrable d'ouverts de cartes de  $X$  sur lesquels des rétractions convenables ont été définies (rappelons que  $X$  a été supposée paracompacte). Numérotant alors ces ouverts, on part du premier d'entre eux avec la rétraction qu'il porte et on prolonge celle-ci de proche en proche: les ajustements successifs se font au moyen d'une partition de l'unité dans un espace  $\mathbf{R}^p$  contenant l'image des cartes. Plusieurs zones de sauvegarde emboîtées sont nécessaires pour éviter les conflits et empêcher d'avoir dans  $r^{-1}(Y')$  des éléments étrangers à  $X'$ ; on n'obtient la rétraction voulue que dans une région entourant  $Y$  plus étroite que celle constituée par les ouverts de départ; il faut d'ailleurs avoir prévu un tel recouvrement ouvert plus étroit de  $Y$  dès le début. Nous ne pouvons en dire davantage ici. L'existence de la rétraction  $r$  était le dernier élément de la justification de la naturalité de l'isomorphisme de Leray sous les hypothèses faites.

Nous passons enfin à la propriété qu'a l'isomorphisme de Leray de se réduire à un produit-croix dans le cas trivial. Supposons donc que  $X = V \times W$  où  $V$  et  $W$  sont des variétés réelles de classe  $C^\infty$  séparées paracompactes orientées et que  $Y = V \times \{w_0\}$  avec  $w_0 \in W$ . Alors, comme nous l'avons vu dans la démonstration du point (i) du lemme 5.5,  $V \times W$  est aussi séparée paracompacte et on peut orienter  $X$  par l'orientation produit de celles de  $V$  et  $W$ . D'autre part,  $Y$  est bien une sous-variété fermée de  $X$  de codimension pure  $N = \dim W$  et on peut l'orienter par son identification canonique avec  $V$ . Le couple  $(X, Y)$  satisfait donc

aux hypothèses de validité de l'isomorphisme de Leray (A.7). Mais dans ce cas trivial, il se réduit à la formule

$$(A.10) \quad \tau_{V \times W, V \times \{w_0\}, k}(z^\#) = z \times \bar{u} \quad \text{pour } z \in H_{k-N}(V),$$

où  $z^\#$  correspond à  $z$  dans l'isomorphisme induit en homologie par l'identification canonique de  $V$  à  $V \times \{w_0\}$  et où  $\bar{u}$  est le générateur de  $H_N(W, W \setminus \{w_0\})$  compatible avec l'orientation de  $W$ .

Avant de justifier cette formule, constatons que la condition (iii) du lemme 5.5 en donne bien des conditions suffisantes de validité. En effet, si  $V$  et  $W$  sont des variétés analytiques complexes séparées paracompactes, on peut considérer leurs variétés réelles de classe  $C^\infty$  canoniquement orientées sous-jacentes ainsi que celles de  $V \times W$  et  $V \times \{w_0\}$ . Alors l'orientation canonique de  $V \times W$  est bien le produit des orientations canoniques de  $V$  et  $W$  et l'orientation canonique de  $V \times \{w_0\}$  est bien celle qui est obtenue par identification à  $V$ .

La formule (A.10) a pour origine le fait que, dans ce cas trivial, on peut tirer parti de l'indépendance de l'isomorphisme de Leray par rapport au voisinage tubulaire  $T$  choisi comme intermédiaire pour en prendre un de forme triviale. «De forme triviale» veut dire que  $|T| = V \times D$  où  $D$  est une  $N$ -boule ouverte de  $W$  centrée en  $w_0$  et que  $\pi_T(v, w) = (v, w_0)$  pour  $(v, w) \in V \times D$ . Les fibres de  $\pi_T$  sont alors de la forme  $\{v\} \times D$  et l'orientation de  $T$ , déduite de celles de  $Y$  et  $X$ , est donnée par l'orientation induite sur  $D$  par  $W$ . La classe d'orientation cohomologique de  $T$  déduite des orientations de  $Y$  et  $X$  est alors  $\bar{Z}_T = \hat{1} \times \bar{U}_D$  où  $\hat{1} \in H^0(V)$  est la classe du cocycle singulier de  $V$  prenant la valeur 1 sur tous les 0-simplexes de  $V$  et  $\bar{U}_D$  est le générateur de  $H^N(D, D \setminus \{w_0\})$  compatible avec l'orientation de  $D$ . Nous allons voir qu'on peut en déduire la formule suivante concernant l'isomorphisme de Thom pour ce voisinage tubulaire trivial:

$$(\varphi_{T,k})^{-1}(z^\#) = z \times \bar{u}_D \quad \text{pour } z \in H_{k-N}(V),$$

où  $z^\# \in H_{k-N}(V \times \{w_0\})$  correspond à  $z$  dans l'isomorphisme induit par l'identification canonique de  $V$  à  $V \times \{w_0\}$  et où  $\bar{u}_D$  est le générateur de  $H_N(D, D \setminus \{w_0\})$  compatible avec l'orientation de  $D$ . En effet, on a, d'une part,

$$z^\# = z \times \hat{w}_0,$$

où  $\hat{w}_0$  est la classe d'homologie de l'unique 0-simplexe singulier de  $\{w_0\}$  (cf. [Sp] 5.3.12) et, d'autre part, d'après la formule (A.8),

$$\varphi_{T,k}(z \times \bar{u}_D) = (\pi_T)_{k-N}((\hat{1} \times \bar{U}_D) \frown (z \times \bar{u}_D))$$

avec

$$(\hat{1} \times \bar{U}_D) \frown (z \times \bar{u}_D) = (-1)^{0(N-N)}(\hat{1} \frown z) \times (\bar{U}_D \frown \bar{u}_D) = z \times \tilde{w}_0,$$

où  $\tilde{w}_0$  est la classe d'homologie du 0-simplexe singulier de  $D$  d'image  $w_0$  (cf. [Sp] 5.6.21, 5.6.17 et 5.6.19; nous adoptons les conventions de signe de [Sp] pour le produit-chapeau). Et, vu la forme triviale de  $\pi_T$ , on a bien

$$(\pi_T)_{k-N}(z \times \tilde{w}_0) = z \times \hat{w}_0$$

par naturalité du produit-croix. Cela montre la formule annoncée concernant  $(\varphi_{T,k})^{-1}$  pour un tel voisinage tubulaire  $T$ . Il n'y a plus alors qu'à utiliser la naturalité du produit-croix pour obtenir la formule (A.10).