

11. Extension du théorème 1.3 à une variété quasi-projective lisse

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

(10.20.2) P est non transverse à S dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \Rightarrow$
 le point d'intersection de P avec R est valeur critique de $p|_{S \setminus Q}$.

Ces valeurs critiques sont les mêmes que celles de l'application de classe C^∞ sous-jacente entre variétés réelles. D'après le théorème de Sard (cf. [Di2] (16.23.1)), l'ensemble K_S de ces valeurs critiques est de mesure nulle dans R . La réunion K des K_S pour $S \in \mathfrak{S}$ étant finie, est donc aussi de mesure nulle et en particulier distincte de R . Alors, si $t \in R \setminus K$, l'élément de $\mathcal{L}^{r+1}(Q)$ déterminé par Q et t est, d'après (10.20.2), transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de \mathfrak{S} . Cela montre que $\mathcal{P}^{r+1}(\mathfrak{S}, Q) \neq \mathcal{L}^{r+1}(Q)$. Notons que ce raisonnement serait encore valable si \mathfrak{S} était une quelconque famille finie ou dénombrable de sous-variétés. \square

Dans le cas particulier où $n \geq 2$ et où Q est un $(n-2)$ -plan projectif transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de \mathfrak{S} , le corollaire 10.19 et la proposition 10.20 prouvent que $\mathcal{P}^{n-1}(\mathfrak{S}, Q)$ est vide ou composé d'un nombre fini de points. Cela justifie la finitude des hyperplans «mauvais» du théorème 1.3.

Toutes les assertions d'algèbricité ou de généricité que nous avons avancées dans l'énoncé des théorèmes 1.1 et 1.3 ou utilisées dans leur démonstration sont maintenant justifiées. Les démonstrations de ces théorèmes sont donc enfin complètes. $\square \square$

11. EXTENSION DU THÉORÈME 1.3 À UNE VARIÉTÉ QUASI-PROJECTIVE LISSE

On peut généraliser sans trop de changements le théorème 1.3 au cas où l'espace ambiant $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est remplacé par un sous-ensemble algébrique fermé X de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ avec l'importante restriction, toutefois, que $X \setminus A$ soit lisse. Le pinceau \wedge continue à être un pinceau d'hyperplans projectifs dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ mais l'ensemble dont on considère les sections, au lieu d'être le complémentaire $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$ d'un ensemble algébrique fermé A , est une variété quasi-projective lisse $X \setminus A$. On doit, dans ce cas, munir X tout entier d'une stratification de Whitney \mathfrak{S}^+ telle que A soit union de strates, ce qui est toujours possible (cf. [L-T2] (1.2.7)), et l'axe \mathcal{M} de \wedge doit être pris transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de \mathfrak{S}^+ . C'est bien une généralisation de la situation du théorème 1.3 car la stratification \mathfrak{S} de A qui y est considérée peut être trivialement étendue en une stratification de Whitney \mathfrak{S}^+ de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ par la strate $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$ à laquelle \mathcal{M} et \mathcal{L} sont trivialement transverses. Dans notre nouvelle situation, le «bon» hyperplan \mathcal{L} et les hyperplans «mauvais» \mathcal{L}_i sont considérés *relativement* à \mathfrak{S}^+ . Cela signifie que, pour la détermination des \mathcal{L}_i , entrent non seulement en compte la non transversalité à des strates de A mais au moins aussi, dans l'hypothèse d'une stratification minimale, les points de tangence à $X \setminus A$.

Nous avons en fait été contraint de faire figurer explicitement ces points de tangence dans notre théorème. La raison en est que toutes les étapes de la démonstration du théorème 1.3 peuvent être généralisées sans trop de mal à notre nouvelle situation *sauf* celle du §5 qui fait intervenir l'isomorphisme de Leray pour lequel il est indispensable que le sous-espace dont on considère le complémentaire dans la variété ambiante soit une sous-variété *lisse*, ce que $\mathcal{L}_i \cap (X \setminus A)$ n'est pas en raison précisément de ces points de tangence. Nous contournons cette difficulté par un artifice qui consiste à ôter de $X \setminus A$ ces points, ce qui revient à les ajouter à A , à poursuivre le raisonnement sans eux et à ne les réintroduire qu'au moment de la conclusion. Cette réintroduction produit alors une perturbation qui n'est pas trop grande car nous montrons, comme pour le point (iv) du lemme 9.2, que ces points de tangence sont en nombre fini.

Il y a donc deux modifications, par rapport à l'énoncé du théorème 1.3, que cette difficulté provoque:

— d'une part nous sommes obligés de considérer, à la place de l'homomorphisme naturel

$$m_k^i: H_k(\mathcal{U} \cap (X \setminus A)) \rightarrow H_k(\mathcal{L}_i \cap (X \setminus A))$$

l'homomorphisme naturel

$$m_k^i: H_k(\mathcal{U} \cap (X \setminus A)) \rightarrow H_k((\mathcal{L}_i \cap (X \setminus A)) \setminus K_i),$$

où K_i est l'ensemble des points de tangence de \mathcal{L}_i à $X \setminus A$;

— d'autre part les implications qui concluent le théorème ne sont plus valables qu'avec de légères restrictions sur les valeurs de k .

Malgré ces défauts, le théorème auquel nous aboutissons permet de retrouver la version homologique du théorème de Lefschetz pour une variété quasi-projective lisse démontré par Goresky-MacPherson et Hamm-Lê (cf. [G-M1] theorem 4.1, [G-M2] II.5.1 et [H-L2] theorem 1.1.3). Nous précisons ci-dessous l'énoncé, plus faible que ceux cités, que nous parvenons à retrouver (théorème 11.2). Nous opérons cette déduction en conclusion du paragraphe.

Voici donc notre généralisation du théorème 1.3:

THÉORÈME 11.1. *Soit X un ensemble algébrique fermé dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, avec $n \geq 2$, et A un sous-ensemble algébrique fermé de X tel que $X \setminus A$ soit lisse. Soit \mathfrak{S}^+ une stratification de Whitney de X telle que A soit union de strates et soit Λ un pinceau d'hyperplans projectifs de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$*

d'axe \mathcal{M} transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à toutes les strates de \mathfrak{S}^+ . Soient $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s$ des éléments de Λ , avec, $s \geq 2$, parmi lesquels tous ceux qui ne sont pas transverses à toutes les strates de \mathfrak{S}^+ (ils sont en nombre fini) et soit \mathcal{L} un autre élément de Λ . Pour $1 \leq i \leq s$, soit K_i l'ensemble des points de tangence de \mathcal{L}_i à $X \setminus A$ (c'est un ensemble fini, éventuellement vide, disjoint de \mathcal{M}). Considérons, pour tout k , les homomorphismes suivants induits par inclusion entre groupes d'homologie singulière à coefficients entiers:

$$\begin{aligned} m_k &: H_k(\mathcal{M} \cap (X \setminus A)) \rightarrow H_k(\mathcal{L} \cap (X \setminus A)) \\ m_k'^i &: H_k(\mathcal{M} \cap (X \setminus A)) \rightarrow H_k(\mathcal{L}_i \cap (X \setminus A) \setminus K_i) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq s \\ l_k &: H_k(\mathcal{L} \cap (X \setminus A)) \rightarrow H_k(X \setminus A). \end{aligned}$$

Si d_1, \dots, d_p sont les dimensions complexes des composantes irréductibles de X non contenues dans A , ces homomorphismes vérifient les implications suivantes:

— pour $k \neq 2d_1, \dots, 2d_p$:

$$l_k \text{ est surjectif} \quad \text{si} \quad \begin{cases} m_{k-1} \text{ est surjectif} \\ m_{k-2}'^i \text{ est surjectif pour tout } i \\ m_{k-2} \text{ est injectif,} \end{cases}$$

— pour $k \neq 2d_1 - 1, \dots, 2d_p - 1$:

$$l_k \text{ est injectif} \quad \text{si} \quad \begin{cases} m_k \text{ est surjectif} \\ m_{k-1}'^i \text{ est surjectif pour tout } i \\ m_{k-1} \text{ est injectif} \\ \text{Ker } m_{k-2} \cap \text{Ker } m_{k-2}'^1 \cap \dots \cap \text{Ker } m_{k-2}'^s = \{0\}, \end{cases}$$

avec la convention $H_k(\cdot) = 0$ pour $k < 0$.

Démonstration. Nous allons suivre pas à pas la démonstration du théorème 1.3 et faire les adaptations nécessaires. Rappelons que cette démonstration a occupé les §§3 à 8.

Adaptation du §3. Nous procédons de la même manière à l'éclatement de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ le long de \mathcal{M} et nous gardons les notations (3.1) à (3.11) (cf. aussi fig. 3.1). Mais, outre \tilde{A} , nous portons aussi notre attention sur la transformée totale \tilde{X} de X .

Cette attention portée à X est d'ailleurs prise en compte par \mathfrak{S}^+ qui est une stratification de X tout entier, adaptée à A . A la place de la stratification \mathfrak{S} de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ définie en (3.12), nous considérerons donc une stratification $\tilde{\mathfrak{S}}^+$ définie à partir de \mathfrak{S}^+ de la même manière que \mathfrak{S} à partir de \mathfrak{S} , mais où le rôle de $\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{A}$ est joué par les \tilde{S} provenant des $S \in \mathfrak{S}^+$ tels que $S \subset X \setminus A$, et où l'on doit, cette fois, ajouter les strates exceptionnelles $(\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{X}) \setminus \tilde{\mathcal{M}}$ et $(\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{X}) \cap \tilde{\mathcal{M}}$. Ainsi donc

$$(11.1.1) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathfrak{S}}^+ = & \{ \tilde{S} \setminus \tilde{\mathcal{M}} \mid S \in \mathfrak{S}^+ \} \cup \{ \tilde{S} \cap \tilde{\mathcal{M}} \mid S \in \mathfrak{S}^+ \} \\ & \cup \{ (\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{X}) \setminus \tilde{\mathcal{M}}, (\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{X}) \cap \tilde{\mathcal{M}} \}. \end{aligned}$$

Le LEMME 3.13 est alors valable, avec la même démonstration, avec \mathfrak{S}^+ à la place de \mathfrak{S} et X à la place de A . Comme A est réunion de strates de \mathfrak{S}^+ , le point (i) de ce lemme a pour conséquence

$$(11.1.2) \quad \tilde{X} \setminus \tilde{A} \text{ est réunion de strates de } \tilde{\mathfrak{S}}^+.$$

Cela est important car, puisque $X \setminus A$ a remplacé $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$ dans l'énoncé du théorème, c'est désormais $\tilde{X} \setminus \tilde{A}$ qui jouera le rôle de $\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{A}$ dans la démonstration.

De l'assertion (3.14) à la proposition 3.21 incluse, tout repose sur le lemme 3.13 donc reste valable avec $\tilde{\mathfrak{S}}^+$ à la place de $\tilde{\mathfrak{S}}$. Les notations et relations (3.15) à (3.19) restent inchangées mais, pour (3.20), on doit prendre, à la place de $\tilde{\mathfrak{S}}_*$,

$$(11.1.3) \quad \tilde{\mathfrak{S}}_*^+ = \tilde{\mathfrak{S}}^+ \mid \tilde{\mathbf{P}}_*^n.$$

La PROPOSITION 3.21, proposition principale du paragraphe, est alors valable avec $\tilde{\mathfrak{S}}_*^+$ à la place de $\tilde{\mathfrak{S}}_*$. D'après (11.1.3) et (11.1.1), les conséquences en sont maintenant que la fibration respecte les traces sur $\tilde{\mathbf{P}}_*^n$ de $\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{X}$, des \tilde{S} pour $S \in \mathfrak{S}^+$ et de $\tilde{\mathcal{M}}$. Mais, d'après (11.1.2), cela entraîne qu'elle respecte aussi la trace de $\tilde{X} \setminus \tilde{A}$.

A partir de là, nous ne nous étions plus intéressés qu'à ce qui se passait dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$ donc dans $\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{A}$. Maintenant, c'est $X \setminus A$ et $\tilde{X} \setminus \tilde{A}$ qui prendront leurs places respectives. Nous garderons donc les notations (3.23) à (3.28) mais avec les nouvelles valeurs suivantes données à P et \tilde{P} :

$$(11.1.4) \quad \begin{cases} P = X \setminus A \\ \tilde{P} = \tilde{X} \setminus \tilde{A} \end{cases},$$

le reste étant défini à partir de P et \tilde{P} de manière inchangée. On peut garder la figure 3.2 comme représentation imagée de ces notations, à condition de remplacer les légendes des deux flèches ondulées de gauche: «on enlève \tilde{A} » et «on enlève A », par les légendes respectives: «on prend la trace sur $\tilde{X} \setminus \tilde{A}$ » et «on prend la trace sur $X \setminus A$ ».

Les ISOMORPHISMES (3.29), ainsi que la première remarque qui les suit, sont encore valables avec ces nouvelles définitions mais il est important de noter dès à présent que, cette fois, les L_i et $L_i^\#$ ne sont pas forcément lisses. Il faut aussi noter que maintenant M , L ou certains L_i peuvent être vides si X est de dimension 1 ou 0, même en dehors du cas trivial où $A = X$.

Cette éventuelle vacuité contraint à une légère adaptation du COROLLAIRE 3.30 qui demeure toutefois pour l'essentiel vrai. Nous avons en effet remarqué que la nouvelle forme de la proposition 3.21 donnait une fibration respectant la trace sur $\tilde{\mathbf{P}}_*^n$ de $\tilde{X} \setminus \tilde{A}$. Compte tenu donc que cette trace puisse être vide, nous aboutissons à l'énoncé suivant, valable avec les nouvelles définitions (11.1.4):

$$(11.1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } L \text{ est vide, alors } \tilde{P}_* \text{ est vide. Sinon, l'application } \tilde{p}_* \text{ est une fibration} \\ \text{localement triviale topologique de } \tilde{P}_* \text{ sur } \mathbf{P}_*^1 \text{ dont la fibre au-dessus de } \lambda \\ \text{est } L^\#. \text{ Si } M \text{ est non vide, alors } \tilde{M}_* = M \times \mathbf{P}_*^1 \text{ est un sous-fibré trivial de} \\ \tilde{P}_* \text{ dont la fibre au-dessus de } \lambda \text{ est } M^\#. \end{array} \right.$$

Cette adaptation du corollaire 3.30 à notre nouvelle situation termine l'examen du §3.

Adaptation du §4. Le contenu de ce paragraphe repose entièrement sur le corollaire 3.30 et les isomorphismes (3.29) avec la première remarque qui les suit. Nous avons vu que dans notre nouvelle situation et avec les nouvelles définitions (11.1.4), les isomorphismes (3.29) restaient valables et le corollaire 3.30 pouvait être adapté en l'énoncé (11.1.5). Tout le §4 reste donc valable dans le cas où M donc L sont non vides. Mais $M = \emptyset$ entraîne que $M^\#, \tilde{M}_{C_j}, \tilde{M}_B$ et \tilde{M}_* sont tous vides et $L = \emptyset$ entraîne que $M = \emptyset$ et que $L^\#, \tilde{P}_{C_j}, \tilde{P}_B$ et \tilde{P}_* sont tous vides. Dans le cas où L ou seulement M est vide, le lemme 4.4 et son corollaire 4.5, le lemme 4.6 ainsi que l'isomorphisme (4.8) et ses propriétés (4.9) et (4.10) demeurent trivialement vrais. Le reste du paragraphe ne se servant que de ces résultats et des isomorphismes (3.29), est donc aussi valable dans ces cas particuliers. Au total, tout le contenu du §4 peut donc être gardé inchangé lorsqu'on se place dans la situation du théorème 11.1 et qu'on redéfinit P et \tilde{P} par (11.1.4).

Adaptation du §5. Comme nous l'avons annoncé, c'est là que surgissent des difficultés.

Le début du paragraphe, tendant à séparer la contribution de chaque $L_i^\#$, est purement topologique et peut être gardé sans changement, même dans les cas exceptionnels où M ou même L ou certains L_i sont vides. Il s'agit de la définition (5.1), des relations (5.2) et du LEMME 5.3.

C'est au moment d'appliquer l'isomorphisme de Leray que les choses changent. Les relations ensemblistes (5.4) sont toujours valables mais les conditions d'application de l'isomorphisme de Leray aux couples $(\tilde{P}_i, L_i^\#)$ et $(\tilde{M}_i, M_i^\#)$, telles qu'elles sont récapitulées par le LEMME 5.5 sont maintenant en défaut. En effet, malgré la lissité de $X \setminus A$, les $L_i = \mathcal{L}_i \cap (X \setminus A)$ ne sont plus forcément lisses car \mathcal{L}_i n'étant pas forcément transverse aux strates de \mathfrak{S}^+ contenues dans $X \setminus A$, peut avoir des points de tangence à $X \setminus A$ qui forment l'ensemble K_i de l'énoncé. Ainsi donc, compte tenu des isomorphismes (3.29), la seconde composante du couple $(\tilde{P}_i, L_i^\#)$ peut ne pas être lisse et l'isomorphisme de Leray ne lui est alors pas applicable.

Nous commençons par montrer que ces points de tangence qui font difficulté sont en nombre fini et non situés sur \mathcal{M} , c'est-à-dire que:

(11.1.6) Les ensembles K_i , pour $1 \leq i \leq s$, sont finis et disjoints de \mathcal{M} .

Cette assertion résulte de l'assertion analogue concernant l'ensemble C qui intervient en (9.6.6) dans la preuve du point (iv) du lemme 9.2. En effet, ce qu'un peu abusivement nous avons appelé «points de tangence de \mathcal{L}_i à $X \setminus A$ » sont les points où \mathcal{L}_i rencontre $X \setminus A$ non transversalement. Mais puisque $X \setminus A$ contient la strate de \mathfrak{S}^+ passant par un tel point, \mathcal{L}_i rencontre *a fortiori* non transversalement cette strate. Les points de tangence de \mathcal{L}_i à $X \setminus A$ font donc partie des points de rencontre non transversale de \mathcal{L}_i avec les strates de \mathfrak{S}^+ . Or ces derniers forment précisément l'ensemble C de la preuve du point (iv) du lemme 9.2 à ceci près que X a remplacé A et \mathfrak{S}^+ a remplacé \mathfrak{S} . L'assertion (11.1.6) se trouve ainsi établie.

Tirant parti de (11.1.6), nous allons maintenant contourner la difficulté provoquée par les K_i en les intégrant au sous-ensemble algébrique A qu'on ôte de X . Nous posons donc

$$(11.1.7) \quad K = \bigcup_{i=1}^s K_i$$

et

$$(11.1.8) \quad A' = A \cup K.$$

C'est un nouveau sous-ensemble algébrique fermé de X . Nous allons continuer avec A' à la place de A ; ce n'est qu'au moment des conclusions que nous reviendrons à A . Clairement, $X \setminus A'$ est lisse (éventuellement vide) et maintenant plus aucun élément du pinceau \wedge n'a de points de tangence avec $X \setminus A'$. Mais nous sommes sortis des hypothèses du théorème 11.1 car la stratification \mathfrak{S}^+ de X n'est pas forcément adaptée à A' , c'est-à-dire que A' n'est pas forcément réunion de strates. Nous sommes donc amenés à modifier \mathfrak{S}^+ en

$$(11.1.9) \quad \mathfrak{S}^{+'} = \mathfrak{S}^+_{|X \setminus K} \cup \{ \{c\} \mid c \in K \}.$$

Comme K est fini, le même argument que dans la preuve du point (iv) du lemme 9.2 montre que $\mathfrak{S}^{+'}$ est aussi une stratification de Whitney de X (en fait, la situation est ici beaucoup plus simple). Maintenant A' est bien réunion de strates de $\mathfrak{S}^{+'}$. D'autre part, comme \mathcal{M} et les hyperplans de \wedge autres que $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s$ sont transverses dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ aux strates de \mathfrak{S}^+ et ne rencontrent pas K , ils sont aussi transverses dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ aux strates de $\mathfrak{S}^{+'}$. Si nous prenons donc A' et $\mathfrak{S}^{+'}$ à la place de A et \mathfrak{S}^+ , nous sommes dans les hypothèses du théorème 11.1 avec le même pinceau \wedge et les mêmes hyperplans exceptionnels $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s$.

Tout ce qui a été fait jusqu'ici avec A et \mathfrak{S}^+ est donc aussi valable avec A' et $\mathfrak{S}^{+'}$. Mais nous devons introduire de nouvelles notations relatives à ces nouveaux éléments pour les distinguer de celles relatives aux anciens. Nous faisons la convention suivante:

$$(11.1.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Toute notation relative à la situation avec } A \text{ et } \mathfrak{S}^+ \text{ sera transformée en une} \\ \text{notation homologue relative à la situation avec } A' \text{ et } \mathfrak{S}^{+'} \text{ en lui affectant un} \\ \text{prime.} \end{array} \right.$$

Ainsi, par exemple, $P' = X \setminus A'$, $\tilde{P}' = \tilde{X} \setminus \tilde{A}'$, où, bien entendu, \tilde{A}' désigne la transformée totale de A' . Et

$$\begin{aligned} L'_i &= \mathcal{L}_i \cap P' \\ L_i'^{\#} &= \mathcal{L}_i^{\#} \cap \tilde{P}' \\ \tilde{P}'_* &= \tilde{P}' \setminus (L_1'^{\#} \cup \dots \cup L_s'^{\#}) \\ \tilde{P}'_i &= \tilde{P}'_* \cup L_i'^{\#} \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

C'est donc aux couples $(\tilde{P}'_i, L_i'^{\#})$ et $(\tilde{M}'_i, M_i'^{\#})$ que nous allons demander de satisfaire au lemme 5.5. Il faudra toutefois tenir compte de la vacuité éventuelle de M' ou même de certains L'_i en ajoutant, pour chaque point de l'énoncé, la possibilité des cas exceptionnels suivants:

$$(11.1.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i) Si } M' \text{ est vide, } M_i'^{\#} \text{ et } \tilde{M}'_i \text{ sont vides; si } L'_i \text{ est de plus vide, } L_i'^{\#} \text{ est} \\ \text{vide; il se peut même que } \tilde{P}'_i \text{ soit vide.} \\ \text{(ii) Si } M' \text{ est vide, } \tilde{M}'_i \text{ et } M_i'^{\#} \text{ sont vides.} \\ \text{(iii) Même chose.} \end{array} \right.$$

Exemple 1. $X = D \cup \{x_0\}$ où D est une droite projective ne contenant pas x_0 ; $A = \{a_0\}$ où $a_0 \in D$; $\mathfrak{S}^+ = \{D \setminus \{a_0\}, \{a_0\}, \{x_0\}\}$. Alors \mathcal{M} ne rencontre ni D ni x_0 ; on peut prendre seulement 2 hyperplans «mauvais»: \mathcal{L}_1 déterminé par \mathcal{M} et x_0 et \mathcal{L}_2 déterminé par \mathcal{M} et a_0 ; supposons que $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$. On a donc $M = \emptyset$, $L_1 = \{x_0, x_1\}$ avec $x_1 \in D$ et

$L_2 = \emptyset$. On a, d'autre part, $K_1 = \{x_0\}$ et $K_2 = \emptyset$, donc $L'_1 = \{x_1\}$ et $L'_2 = \emptyset$. Enfin, $L(=L')$ est réduit à un point donc ni \tilde{P}'_1 ni \tilde{P}'_2 ne sont vides.

Exemple 2. $X = \{x_1, \dots, x_p\}$, $A = \emptyset$. Dans ce cas $A' = X$ et $P' = \emptyset$ bien que $P = X \setminus A$ ne soit pas vide. Comme P' va devoir remplacer P , cela explique que nous n'ayons pas écarté de la démonstration le cas trivial où $A = X$.

Nous allons maintenant vérifier que le LEMME 5.5, qui est le verrou de la situation, est, une fois complété par (11.1.11), valable pour les couples $(\tilde{P}'_i, L'_i{}^\#)$ et $(\tilde{M}'_i, M'_i{}^\#)$ avec M' remplaçant M au point (iii). Rappelons, pour commencer, que \mathcal{M} et \mathcal{L} sont transverses dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ à $P' = X \setminus A'$ (en convenant qu'il y a transversalité quand P' ou l'intersection est vide) puisqu'ils sont transverses à toutes les strates de \mathfrak{S}^+ et que $X \setminus A'$ en est une réunion. Il en résulte que, lorsqu'ils ne sont pas vides, M' et L' sont des sous-variétés (lisses!) de P' de codimensions complexes pures respectives 2 et 1. Mais, par construction de A' , les hyperplans exceptionnels \mathcal{L}_i aussi sont transverses à $X \setminus A'$ donc, quand ils ne sont pas vides, les L'_i aussi sont des sous-variétés de P' de codimension pure 1. Nous servant de ces faits, nous allons maintenant passer en revue les démonstrations des différents points du lemme 5.5.

Dans la preuve du point (iii), M' n'est plus un ouvert de \mathcal{M} . Quand il n'est pas vide, c'en est toutefois une sous-variété, d'après ce qui précède, et le reste de l'argument utilise seulement ce fait-là.

Dans la preuve du point (i), pour le couple $(\tilde{M}'_i, M'_i{}^\#)$, il faut rajouter la précaution que M' peut être vide. En ce qui concerne le couple $(\tilde{P}'_i, L'_i{}^\#)$, il se trouve que \tilde{P}'_i continue à être un ouvert de \tilde{P}' , car les relations (5.2) sont toujours valables, mais que \tilde{P}' n'est plus un ouvert de $\tilde{\mathbf{P}}^n$. A la vacuité éventuelle de \tilde{P}'_i ou $L'_i{}^\#$ près, la démonstration resterait toutefois valable si nous montrions que \tilde{P}' est vide ou est une sous-variété de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ transverse à $\mathcal{L}_i{}^\#$. Mais, quand P' est non vide, cela résulte des assertions (5.5.1) et (5.5.2) appliquées avec $S = P'$ et $\mathcal{H} = \mathcal{L}_i$.

Dans la preuve du point (ii), on se trouve devant la même modification que pour le point (i). Mais, si M' n'est pas vide, on peut voir que \tilde{M}' est une sous-variété de \tilde{P}' en appliquant (5.5.1) à $S = P'$. L'assertion (5.5.2) appliquée avec $\mathcal{H} = \mathcal{L}_i$ donne de plus que \tilde{M}' est transverse à $\mathcal{L}_i{}^\#$ dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$. Comme $\tilde{P}' \supset \tilde{M}'$, le même raisonnement que dans la preuve du point (iii) du lemme 9.2 montre alors que \tilde{M}' est transverse dans \tilde{P}' à $\tilde{P}' \cap \mathcal{L}_i{}^\# = L'_i{}^\#$.

Cela achève de montrer que le LEMME 5.5, complété par les éventualités (11.1.11), est valable pour les couples $(\tilde{P}'_i, L'_i{}^\#)$ et $(\tilde{M}'_i, M'_i{}^\#)$.

La validité de l'isomorphisme de Leray (5.6) et de ses propriétés (5.7) et (5.8) est conditionnée par les trois points du lemme 5.5. Mais dans les cas supplémentaires exceptionnels que peuvent présenter les couples $(\tilde{P}'_i, L'_i{}^\#)$ et $(\tilde{M}'_i, M'_i{}^\#)$, et qui sont donnés par les points correspondants de (11.1.11), on a encore trivialement (5.6), (5.7) et (5.8). Les couples $(\tilde{P}'_i, L'_i{}^\#)$ et $(\tilde{M}'_i, M'_i{}^\#)$ y satisfont donc.

Le reste du §5 repose uniquement sur les isomorphismes (5.6) avec leurs propriétés (5.7) et (5.8), sur le lemme 5.3 et sur les isomorphismes (3.29) avec la première remarque qui les suit. Ce qui précède montre donc que son contenu est valable dans la situation du théorème 11.1 et avec les nouvelles définitions (11.1.4) mais à condition de remplacer A par l'ensemble A' défini en (11.1.8) sans toutefois avoir à changer le pinceau \wedge ni ses hyperplans exceptionnels.

Adaptation du §6. Nous allons voir que le contenu de ce paragraphe est valable dans la situation du théorème 11.1 et avec les nouvelles définitions (11.1.4), sans avoir à remplacer

A par A' . Tout d'abord, en effet, nous laissons la définition de f en (6.1) inchangée mais elle s'entend avec les nouvelles définitions (11.1.4) pour P et \tilde{P} . Cette application continue à induire les isomorphismes (6.2) car ce ne sont autres que les isomorphismes (3.29).

D'autre part, le fait que le morphisme d'éclatement f coïncide avec la première projection sur $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ implique toujours, comme en (6.3), que l'application f' que f induit entre \tilde{M} et M coïncide avec la première projection de $M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Alors, la SUITE EXACTE (6.4) demeure valable car elle résulte de manière purement topologique de cette structure de produit et de la valeur de f' .

Nous en venons maintenant à la PROPOSITION 6.8. Sa démonstration figure dans [Ch2] proposition 4. Elle débute par le lemme 1 qui affirme que l'homomorphisme f_k admet une section, puis renvoie pour le reste à la démonstration de [A – F2] §4, theorem 2.

La démonstration de [A – F2] se place dans le cas où P est un sous-ensemble algébrique fermé lisse de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ mais, une fois admis le résultat sur f_k , elle consiste en un raisonnement topologique valable pour une variété quasi-projective qu'il n'est même pas nécessaire de supposer lisse. Ce raisonnement utilise en effet seulement les faits suivants:

- que f induise un isomorphisme de $\tilde{P} \setminus \tilde{M}$ sur $P \setminus M$; mais cela demeure vrai comme simple corollaire de la propriété analogue pour le morphisme d'éclatement f ;

- que le cylindre de l'application f' soit rétracte par déformation d'un voisinage ouvert dans le cylindre de l'application f ; pour cela, il suffit que le couple formé par ces deux cylindres d'application soit triangulable (cf. [Sp] 3.3.11); mais c'est bien le cas puisque le couple (P, M) est triangulable (cf. [Lo] et [Hi]);

- l'isomorphisme de Thom pour le fibré en sphères \tilde{M} sur M ; mais puisqu'il s'agit, comme nous l'avons vu, d'un fibré trivial, on peut se ramener à la formule de Künneth qui est valable sans hypothèse de lissité de la base (mais notons bien que dans notre situation M est lisse!). Remarquons que tout cela inclut l'éventualité que M soit vide; dans ce cas f est tout simplement un isomorphisme.

La démonstration du lemme 1 de [Ch2] se place dans le cas où $P = \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$, mais, outre le cas trivial $P = \emptyset$, elle est en fait valable dès lors que \tilde{P} et P sont des sous-variétés de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ et $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, que f est propre et que toute composante connexe de P rencontre $P \setminus M$ (pour montrer que le degré de f au-dessus de tout compact de P est 1). Ici, nous sommes dans la situation où $P = X \setminus A$ avec l'hypothèse que $X \setminus A$ est lisse. D'autre part, la transversalité de \mathcal{M} dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ aux strates de \mathfrak{S}^+ implique que \mathcal{M} est transverse à $X \setminus A$ qui en est une réunion. Il en résulte, d'après l'assertion (5.5.1), que, si P est non vide, \tilde{P} est une sous-variété de $\tilde{\mathbf{P}}^n$. Il en résulte aussi qu'aucune composante connexe de P ne peut être contenue dans M . Enfin, la propriété de f ne pose pas problème car $\tilde{P} = f^{-1}(P)$ et f est propre.

Cette analyse de sa démonstration, montre que la PROPOSITION 6.8 est encore valable dans notre situation.

Enfin, le COROLLAIRE 6.9 qui conclut le paragraphe demeure aussi valable car il ne fait que rassembler la suite exacte (6.4) et la proposition 6.8. Cela achève la vérification de la validité du contenu du §6.

Adaptation du §7. Conformément à ce que nous avons annoncé au début de ce paragraphe, nous y avons seulement utilisé le diagramme commutatif (7.1), la proposition 4.23, le corollaire 5.20, le corollaire 6.9 et des lemmes élémentaires sur la topologie de

$P^1(C)$. La possibilité d'écrire le diagramme (7.1) est donnée par les isomorphismes (3.29) et sa commutativité provient alors de la définition même des applications qui y figurent. Dès lors donc qu'on se place dans une situation où les isomorphismes (3.29) et les énoncés des §§4, 5 et 6 que nous avons cités sont valables, les conclusions du §7 sont aussi valables.

Adaptation du §8. C'est la même chose que pour le §7, excepté que, dans la démonstration du lemme 8.7, on utilise aussi le corollaire 3.30 et les isomorphismes (3.29) pour prouver la relation (8.7.3). Le corollaire 3.30 est maintenant remplacé par l'énoncé (11.1.5) qui inclut les éventualités nouvelles où M ou même L sont vides. Mais dans ces cas (8.7.3) est trivialement vraie. Les conclusions du §8 sont donc valables dans les situations où l'énoncé (11.1.5), les isomorphismes (3.29) et les énoncés terminaux des §§4, 5 et 6 sont valables.

Bilan. Nous avons vu que les conclusions principales des §§3, 4 et 6, en particulier celles dont on se sert aux §§7 et 8, sont valables dans la situation de l'énoncé du théorème 11.1 si l'on redéfinit P et \tilde{P} comme en (11.1.4) (et les éléments qui leur sont liés en conséquence) et si l'on modifie légèrement le corollaire 3.30 en l'énoncé (11.1.5). En revanche, pour assurer la validité des conclusions du §5, nous avons dû remplacer A par l'ensemble algébrique A' défini en (11.1.8). Mais, grâce à la stratification introduite en (11.1.9), nous avons pu nous retrouver dans les hypothèses du théorème 11.1 sans avoir à changer le pinceau \wedge ni ses hyperplans exceptionnels. Les énoncés des §§3, 4 et 6 dont nous avons parlé sont donc aussi valables avec A' à la place de A . Ce que nous avons dit sur les §§7 et 8 montre alors que leurs conclusions sont valables dans la situation du théorème 11.1, avec P et \tilde{P} définis comme en (11.1.4) mais avec A' à la place de A .

Nous aboutissons ainsi aux conclusions du théorème 1.3 mais en devant y remplacer les homomorphismes m_k , m_k^i et l_k respectivement par les homomorphismes m'_k , $m_k'^i$ et l'_k , également induits par inclusion, et spécifiés ci-dessous avec la convention d'écriture (11.1.10):

$$(11.1.12) \quad \begin{cases} m'_k : H_k(M') \rightarrow H_k(L') \\ m_k'^i : H_k(M') \rightarrow H_k(L_i') \\ l'_k : H_k(L') \rightarrow H_k(P') \end{cases} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq s$$

Il est maintenant temps de revenir de A' à A . Utilisant toujours la convention (11.1.10), nous avons les relations suivantes entre éléments liés à A et éléments liés à A'

$$(11.1.13) \quad \begin{cases} M' = M \\ L' = L \\ L_i' = L_i \setminus K_i \\ P' = P \setminus K \end{cases} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq s$$

où K est défini en (11.1.7) comme réunion des K_i . En effet, \mathcal{M} et \mathcal{L} ne rencontrent pas K et chaque \mathcal{L}_i rencontre K en exactement K_i . Compte tenu des définitions (11.1.4), les homomorphismes $m_k'^i$ qui figurent dans nos conclusions sont donc bien ceux de l'énoncé et l'on a d'autre part

$$(11.1.14) \quad m'_k = m_k .$$

Au stade où nous en sommes, nous aboutissons donc à des conclusions de surjectivité ou d'injectivité pour l'homomorphisme naturel l'_k spécifié en (11.1.12) sous précisément les

hypothèses respectives que l'énoncé du théorème 11.1 donne en vue de la surjectivité ou de l'injectivité de l'homomorphisme l_k . Il nous reste donc à étudier la relation entre l_k et l'_k . Notons

$$(11.1.15) \quad q_k: H_k(P') \rightarrow H_k(P)$$

l'homomorphisme induit en homologie de rang k par l'inclusion $P' = P \setminus K \hookrightarrow P$. Nous avons

$$(11.1.16) \quad l_k = q_k \circ l'_k$$

et sommes donc conduits à étudier quand q_k est surjectif ou injectif. Nous avons évidemment recours à la suite exacte d'homologie relative du couple (P, P') . La finitude de K , établie en (11.1.6), rend la chose particulièrement simple car, comme P est lisse, nous pouvons isoler les éléments c de K au sein de disques ouverts D_c de P mutuellement disjoints et centrés en ces éléments. En excisant le complémentaire dans P de la réunion de ces disques, complémentaire qui est un fermé de P contenu dans l'ouvert $P \setminus K$, nous obtenons

$$H_k(P, P') = \bigoplus_{c \in K} H_k(D_c, D_c \setminus \{c\}) .$$

Or D_c est un disque de dimension réelle $2 \dim_c P$ où $\dim_c P$ désigne la dimension complexe de P en c . Mais $P = X \setminus A$ étant ouvert dans X , le point c est un point lisse de X et $\dim_c P$ est égale à la dimension de l'unique composante irréductible de X passant par c . Comme $c \notin A$, il ne peut évidemment pas s'agir d'une composante irréductible contenue dans A . Ainsi donc, la dimension du disque D_c est-elle l'un des nombres $2d_1, \dots, 2d_p$ où d_1, \dots, d_p sont les dimensions complexes des composantes irréductibles de X non contenues dans A . Par conséquent

$$H_k(P, P') = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq 2d_1, \dots, 2d_p .$$

La suite exacte d'homologie relative du couple (P, P') donne donc que q_k est surjectif pour $k \neq 2d_1, \dots, 2d_p$ et injectif pour $k \neq 2d_1 - 1, \dots, 2d_p - 1$. La relation (11.1.16) montre alors qu'on a les implications:

$$(11.1.17) \quad \begin{cases} l'_k \text{ surjectif} \Rightarrow l_k \text{ surjectif} & \text{pour} \quad k \neq 2d_1, \dots, 2d_p, \\ l'_k \text{ injectif} \Rightarrow l_k \text{ injectif} & \text{pour} \quad k \neq 2d_1 - 1, \dots, 2d_p - 1. \end{cases}$$

Comme il ne nous manquait plus que d'avoir à remplacer l'_k par l_k pour obtenir les implications finales du théorème 11.1, nous y aboutissons donc avec les restrictions respectives sur k que comportent les relations (11.1.17). \square

Nous allons conclure ce paragraphe en montrant que le théorème 11.1 permet de retrouver le théorème de Lefschetz pour une variété quasi-projective lisse. Voici l'énoncé précis auquel il permet d'aboutir:

THÉORÈME 11.2. *Soit X un ensemble algébrique fermé de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, avec $n \geq 1$, et soit A un sous-ensemble algébrique fermé de X tel que $X \setminus A$ soit lisse. Soit \mathfrak{S}^+ une stratification de Whitney de X telle que A soit réunion de strates. Alors, pour tout hyperplan projectif \mathcal{L} de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ transverse aux strates de \mathfrak{S}^+ , l'inclusion $\mathcal{L} \cap (X \setminus A) \hookrightarrow X \setminus A$ induit:*

des isomorphismes des groupes d'homologie singulière à coefficients entiers

$$H_k(\mathcal{L} \cap (X \setminus A)) \xrightarrow{\sim} H_k(X \setminus A) \quad \text{pour } k \leq d - 2,$$

et un homomorphisme surjectif

$$H_k(\mathcal{L} \cap (X \setminus A)) \rightarrow H_k(X \setminus A) \quad \text{pour } k = d - 1,$$

où d est la plus petite dimension des composantes irréductibles de X non contenues dans A .

Cet énoncé est un corollaire de théorèmes plus forts conjecturés par Deligne et démontrés indépendamment par Goresky-MacPherson et Hamm-Lê (cf. [De] conjecture 1.3, [G-M1] theorem 4.1, démonstration détaillée dans [G-M2] II.5.1 et [H-L2] theorem 1.1.3). Nous avons dit dans l'introduction que Goresky-MacPherson et Hamm-Lê ont aussi donné des généralisations aux cas singulier et local. Goresky et MacPherson utilisent la théorie de Morse stratifiée et Hamm et Lê une variante astucieuse de la théorie de Morse à coins. Nous allons voir qu'on peut aussi obtenir le théorème 11.2 à la manière de Lefschetz en le déduisant du théorème 11.1 :

Démonstration du théorème 11.2 à partir du théorème 11.1. Elle sera très semblable à la démonstration du théorème 1.1 à partir du théorème 1.3 donnée au §9. Mais comme cette fois il n'y a pas de codimension à prendre en compte, il sera plus commode de faire une récurrence sur la dimension n de l'espace projectif ambiant.

Pour $n = 1$, \mathcal{L} est réduit à un point et il n'y a que quatre possibilités concernant $X \setminus A$: ou bien vide, ou bien composé d'un nombre fini de points non contenus dans \mathcal{L} , ou bien égal à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, ou bien enfin égal à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ moins un nombre fini de points non contenus dans \mathcal{L} . Dans le premier cas, il est naturel de convenir que $d = -1$. Dans ce cas et dans le deuxième, où $d = 0$, les conclusions du théorème sont vides. Nous préférons dire qu'elles sont trivialement vraies en faisant la convention $H_k(\cdot) = 0$ pour $k < 0$ comme dans le théorème 11.1 que nous utiliserons. Dans les deux derniers cas, on a $d = 1$ et seule la conclusion de surjectivité est non triviale. Mais comme $X \setminus A$ est connexe par arcs et $\mathcal{L} \cap (X \setminus A)$ non vide, elle est bien satisfaite.

Pour l'étape de récurrence, nous supposons que les conclusions du théorème 11.2 soient satisfaites pour $n = n_0 \geq 1$ et nous voulons montrer qu'elles sont alors satisfaites pour $n = n_0 + 1$. Nous nous plaçons donc dans cette situation. Comme alors $n \geq 2$, le lemme 9.1 est valable avec X et \mathcal{S}^+ à la place de A et \mathcal{S} et le $(n-2)$ -plan projectif \mathcal{M} qu'il donne est l'axe d'un pinceau \wedge satisfaisant aux hypothèses du théorème 11.1 dont \mathcal{L} est un « bon » hyperplan. Nous adoptons alors aussi les autres notations du théorème 11.1. Nous voulons, comme au §9, tirer parti de ses implications finales. Nous allons ici aussi voir que les antécédents de ces implications sont satisfaits pour des valeurs convenables de k grâce à l'hypothèse de récurrence. Ce sera, cette fois, le lemme suivant qui permettra de l'appliquer :

LEMME 11.3. Avec les hypothèses et notations du théorème 11.1, le pinceau Λ possède les propriétés suivantes:

- (i) Si $\mathcal{L} \cap X \setminus \mathcal{L} \cap A$ est non vide, soit d' la plus petite dimension des composantes irréductibles de $\mathcal{L} \cap X$ non contenues dans $\mathcal{L} \cap A$; on a alors $d' \geq d - 1$.
- (ii) Pour $1 \leq i \leq s$, si $\mathcal{L}_i \cap X \setminus \mathcal{L}_i \cap (A \cup K_i)$ est non vide, soit d'_i la plus petite dimension des composantes irréductibles de $\mathcal{L}_i \cap X$ non contenues dans $\mathcal{L}_i \cap (A \cup K_i)$; on a alors $d'_i \geq d - 1$.
- (iii) $\mathcal{L} \cap X \setminus \mathcal{L} \cap A$ est lisse; la restriction $\mathfrak{S}^+|_{\mathcal{L}}$ de \mathfrak{S}^+ à \mathcal{L} est une stratification de Whitney de $\mathcal{L} \cap X$ telle que $\mathcal{L} \cap A$ soit union de strates et \mathcal{M} est transverse dans \mathcal{L} à toutes les strates de $\mathfrak{S}^+|_{\mathcal{L}}$.
- (iv) Pour $1 \leq i \leq s$, $\mathcal{L}_i \cap X \setminus \mathcal{L}_i \cap (A \cup K_i)$ est lisse; la restriction de \mathfrak{S}^+ à \mathcal{L}_i peut être raffinée en une stratification de Whitney \mathfrak{S}_i^+ de $\mathcal{L}_i \cap X$ telle que $\mathcal{L}_i \cap (A \cup K_i)$ soit union de strates et que \mathcal{M} soit transverse dans \mathcal{L}_i à toutes les strates de \mathfrak{S}_i^+ .

On n'a pas forcément l'égalité aux points (i) et (ii) comme le montre l'exemple 1 donné après (11.1.11). C'est manifestement un cas exceptionnel, mais nous ne prendrons pas ici la peine de préciser les conditions de l'égalité.

Nous terminons la récurrence à l'aide du lemme 11.3 avant de le démontrer.

D'après le point (iii) du lemme, nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathcal{L} \cap X$ et $\mathcal{L} \cap A$ dans \mathcal{L} avec \mathcal{M} comme hyperplan. Comme $\mathcal{L} \cap X \setminus \mathcal{L} \cap A = \mathcal{L} \cap (X \setminus A)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} m_k \text{ est surjectif} & \quad \text{pour } k \leq d' - 1, \\ m_k \text{ est injectif} & \quad \text{pour } k \leq d' - 2, \end{aligned}$$

où d' est défini comme dans le point (i) du lemme. D'après ce point donc, si $\mathcal{L} \cap X \setminus \mathcal{L} \cap A$ est non vide, cela nous donne *a fortiori* que

$$\begin{aligned} m_k \text{ est surjectif} & \quad \text{pour } k \leq d - 2, \\ m_k \text{ est injectif} & \quad \text{pour } k \leq d - 3. \end{aligned}$$

Ces assertions sont aussi trivialement vraies si $\mathcal{L} \cap X \setminus \mathcal{L} \cap A$ est vide.

D'après le point (iv) du lemme, nous pouvons aussi appliquer l'hypothèse de récurrence pour $1 \leq i \leq s$ à $\mathcal{L}_i \cap X$ et $\mathcal{L}_i \cap (A \cup K_i)$ dans \mathcal{L}_i avec \mathcal{M} comme hyperplan. Comme $\mathcal{L}_i \cap X \setminus \mathcal{L}_i \cap (A \cup K_i)$ est égal à $\mathcal{L}_i \cap (X \setminus A) \setminus K_i$, nous obtenons de même, compte tenu du point (ii) du lemme, que si $\mathcal{L}_i \cap X \setminus \mathcal{L}_i \cap (A \cup K_i)$ est non vide, alors

$$\begin{aligned} m_k^i \text{ est surjectif} & \quad \text{pour } k \leq d - 2, \\ m_k^i \text{ est injectif} & \quad \text{pour } k \leq d - 3, \end{aligned} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq s.$$

Et, si $\mathcal{L}_i \cap X \setminus \mathcal{L}_i \cap (A \cup K_i)$ est vide, ces assertions sont aussi trivialement vraies.

Le théorème 11.1 nous permet alors de conclure à la surjectivité de l_k pour $k \leq d - 1$ et à son injectivité pour $k \leq d - 2$, sous réserve qu'aucune de ces valeurs respectives de k

ne soit exclue par les clauses restrictives respectives de la conclusion du théorème 11.1. Il suffirait en fait, pour cela, qu'on ait $d - 1 < 2d$ puisque d est la plus petite des dimensions des composantes irréductibles de X non contenues dans A . Mais cette inégalité étant équivalente à $d > -1$, est toujours vérifiée. Les conclusions obtenues sur l_k sont donc bien valables et ce sont précisément les conclusions du théorème 11.2. Cela achève la récurrence, sauf dans le cas trivial où $X \setminus A = \emptyset$.

Il nous reste à démontrer le lemme 11.3 pour que la preuve du théorème 11.2 soit complète.

Démonstration du lemme 11.3.

(i) Supposons $\mathcal{L} \cap X \setminus \mathcal{L} \cap A$ non vide. Soit Y une composante irréductible de $\mathcal{L} \cap X$ non contenue dans $\mathcal{L} \cap A$ et de dimension d' . Soit Z l'union des autres composantes irréductibles de $\mathcal{L} \cap X$. Alors $A \cap Y$ et $Z \cap Y$ sont deux sous-ensembles algébriques fermés de Y distincts de Y et, comme Y est irréductible, il en est de même de leur réunion. Soit donc $y \in Y \setminus (A \cup Z)$. En un tel point, on a

$$\dim_y Y = \dim_y \mathcal{L} \cap X \geq \dim_y \mathcal{L} + \dim_y X - \dim_y \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) = \dim_y X - 1$$

(cf. [Wh3] 2.12C). Mais comme $y \notin A$, toutes les composantes irréductibles de X passant par y sont de dimension $\geq d$ et l'on a donc aussi $\dim_y X \geq d$. L'inégalité annoncée pour d' en résulte.

(ii) Le raisonnement du point (i) n'utilise pas d'hypothèse de transversalité. Il est donc aussi valable avec \mathcal{L}_i à la place de \mathcal{L} . Si l'on remarque alors qu'une composante irréductible Y_i de $\mathcal{L}_i \cap X$ qui n'est pas contenue dans $\mathcal{L}_i \cap (A \cup K_i)$ n'est *a fortiori* pas contenue dans $\mathcal{L}_i \cap A$, cela donne le point (ii).

Assertions de lissité de (iii) et (iv). Puisque $\mathcal{L} \cap X \setminus \mathcal{L} \cap A$ est égal à $\mathcal{L} \cap (X \setminus A)$ et $\mathcal{L}_i \cap X \setminus \mathcal{L}_i \cap (A \cup K_i)$ à $\mathcal{L}_i \cap (X \setminus A) \setminus K_i$, ces ensembles sont ceux que nous avons notés L' et L'_i dans la démonstration du théorème 11.1 (cf. (11.1.4) et (11.1.13)). Mais nous y avons montré qu'ils étaient lisses au moment de vérifier que les couples $(\tilde{P}'_i, L'_i{}^\#)$ et $(\tilde{M}'_i, M'_i{}^\#)$ satisfaisaient au lemme 5.5 complété par (11.1.11).

(iii) Il reste à voir l'assertion de stratification. Mais, outre le fait évident que $\mathcal{L} \cap A$ soit union de strates, ce n'est autre que le point (iii) du lemme 9.2 où A et \mathcal{S} jouent le même rôle que X et \mathcal{S}^+ ici.

(iv) En appliquant le point (iv) du lemme 9.2 avec X et \mathcal{S}^+ à la place de A et \mathcal{S} , on obtient une stratification \mathcal{S}_i^+ qui a les propriétés voulues excepté qu'on ne sait pas si K_i est union de strates. Mais si l'on revient à la démonstration du lemme 9.2, on voit qu'en construisant la stratification demandée, on prend comme strate chaque point de X en lequel \mathcal{L}_i rencontre non transversalement la strate de \mathcal{S}^+ passant par ce point (cf. (9.6.6) et (9.6.7)). Et comme $X \setminus A$ est réunion de strates de \mathcal{S}^+ , les points de K_i font partie des points en question. Cela montre que \mathcal{S}_i^+ satisfait aussi à l'exigence que $\mathcal{L}_i \cap (A \cup K_i)$ soit union de strates. \square

Avec la démonstration de ce lemme, la déduction du théorème 11.2 à partir du théorème 11.1 est complète. $\square \square$

Remarque 11.4. On ne peut pas, de la même manière que nous avons déduit le théorème 1.1 du théorème 1.3, démontrer, à l'aide du théorème 11.1,

un théorème du type de Lefschetz valable pour une variété quasi-projective lisse générale et qui prenne en compte la codimension de A dans X . En effet, une fois qu'on est descendu en dimension jusqu'à ce que la trace de A soit vide ou réduite à un nombre fini de points, on se retrouve devant les particularités topologiques de X lui-même alors que, pour $X = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, on se retrouvait dans la situation simple d'un espace projectif. Voir la remarque 9.5 pour plus de détails et voir aussi (12.2).

12. DIRECTIONS DE RECHERCHE

Le cadre géométrique développé dans cet article permet vraisemblablement d'aborder quelques autres problèmes que voici. En particulier, je peux déjà annoncer une généralisation du second théorème de Lefschetz (cf. (12.3)).

(12.1) *Sections par des hypersurfaces au lieu de sections hyperplanes.*

Au lieu de considérer, comme dans les théorèmes 1.3 et 11.1, un pinceau d'hyperplans dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, on peut considérer un système linéaire à un paramètre d'hypersurfaces de degré $d > 1$. Le morphisme de Véronèse ν de degré d (cf. [La] 1.3) permet de plonger $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ de telle sorte qu'un tel système d'hypersurfaces soit transformé en les sections de $\nu(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ par un pinceau d'hyperplans de $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$. On doit pouvoir obtenir une extension des théorèmes 1.3 et 11.1 à ces systèmes à un paramètre d'hypersurfaces en appliquant le théorème 11.1 au pinceau d'hyperplans correspondant dans $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$. Mais interviendront alors, en plus, les points de tangence d'éléments de ce pinceau avec $\nu(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$; ces éléments exceptionnels correspondront à des hypersurfaces du système linéaire présentant des singularités. On devrait toutefois pouvoir en déduire, en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 11.2 que nous avons donnée, que le théorème 1.1 est aussi valable pour la section de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$ par une hypersurface lisse transverse aux strates d'une stratification de Whitney de A .

(12.2) *Extension du théorème 1.1 à certaines variétés quasi-projectives particulières.*

Nous avons vu pourquoi le théorème 1.1 ne pouvait être généralisé au cas où l'espace ambiant $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est remplacé par un ensemble algébrique fermé X de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, même en supposant $X \setminus A$ lisse (cf. remarques 11.4 et 9.5). On peut toutefois se demander s'il y a des classes significatives de X pour lesquelles il est valable. D'après (12.1), il y aurait en tout cas les variétés de Véronèse.