§2. Valeurs de l'indice

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Cliff_m l'algèbre de Clifford d'une telle forme sur $\mathbf{K}^m$. Le corollaire 1 montre l'égalité $\mathrm{Cliff}_{m+2} \cong \mathrm{Cliff}_m \otimes \mathrm{Mat}_2(\mathbf{K})$, connue sous le nom de *périodicité des algèbres de Clifford* sur $\mathbf{K}$. Le corollaire suivant en est une conséquence immédiate.

COROLLAIRE 2. *Pour* $\mathbf{K}$ *algébriquement clos, on a* $\mathrm{Cliff}_m \cong \mathrm{Mat}_{2^{m/2}}(\mathbf{K})$ *lorsque* m *est pair, et* $\mathrm{Cliff}_m \cong \mathrm{Mat}_{2^{m-1/2}}(\mathbf{K}) \oplus \mathrm{Mat}_{2^{m-1/2}}(\mathbf{K})$ *lorsque* m *est impair.*

§ 2. VALEURS DE L'INDICE

La preuve du lemme suivant résulte immédiatement de la définition de l'indice donnée dans l'introduction.

LEMME 3. *Soit* $1 \in N \subseteq M$ *une paire d'anneaux et soit* l *un entier tels que chaque étage* M_k *de la tour associée par construction fondamentale soit un* M_k*-module libre de rang* 1. *Alors* $[M:N] = l$.

COROLLAIRE. *Avec les notations du* § 1 $[\mathrm{Cliff}(V):\mathrm{Cliff}(W)] = 2$.

Il peut être intéressant d'avoir un critère qui assure que les hypothèses du lemme 3 sont vérifiées. Pour cela, on aura besoin de la notion de trace markovienne. Si $1 \in N \subseteq M$ est une paire d'algèbres semi-simples de dimension finie sur un corps commutatif $\mathbf{K}$, et si $\beta \in \mathbf{K}^{\times}$, une trace tr sur M est *markovienne de module* β si tr et sa restriction $\mathrm{tr}\backslash_N$ sont fidèles, et s'il existe une trace $\mathrm{Tr}: L = \mathrm{End}_N(M) \to \mathbf{K}$ telle que $\mathrm{Tr}(\lambda(x)) = \mathrm{tr}(x)$ et $\beta\mathrm{Tr}(\lambda(x)E) = \mathrm{tr}(x)$ pour tout $x \in M$, où E est l'espérance conditionnelle définie avant le lemme 2. On peut alors montrer que Tr est elle-même markovienne de module β pour la paire $M \subset L$ ([GHJ] 2.7.4), ce qui permet de définir une trace sur $\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$ et une suite d'espérances conditionnelles fidèles $E_k: M_k \to M_{k-1}$.

On vérifie aisément que la trace tr définie sur $\mathrm{Cliff}(V)$ au § 1 est markovienne de module 2.

LEMME 4. *Soient* $1 \in N \subseteq M$ *une paire d'algèbres de dimension finie sur* $\mathbf{K}$, *et* $E: M \to N$ *une espérance conditionnelle fidèle. Si* M *est libre de rang* l *comme* N*-module à droite, alors* $L = \mathrm{End}_N(M)$ *est libre de rang* l *comme* M*-module à droite.*

Preuve. Par la proposition 2.6.3 de [GHJ], l'application

$$\phi: M \otimes_N M \to L: x \otimes y \mapsto \lambda(x)E\lambda(y)$$

est un isomorphisme de M-modules à droite. Mais $M \otimes_N M \cong N^l \otimes_N M \cong M^l$ où le dernier isomorphisme est donné par l'application M-linéaire à droite:

$$(y_1, ..., y_l) \otimes x \mapsto (y_1 x, ..., y_l x), \quad y_i \in N, x \in M. \qquad \square$$

Des lemmes 3 et 4, on déduit immédiatement que $[M:M] = 1$ et $[M:\mathbf{K}] = \dim(M)$ pour une $\mathbf{K}$-algèbre unitale M de dimension finie.

PROPOSITION 1. *Soient* $1 \in N \subseteq M$ *une paire d'algèbres de dimension finie sur* $\mathbf{K}$. *S'il existe une trace markovienne sur* M, *et si* M *est libre de rang* l *comme* N*-module à droite, alors les hypothèses de lemme* 3 *sont satisfaites. En particulier,* $[M:N] = l$.

Preuve. Grâce à l'existence d'une trace markovienne sur M, chaque M_k est munie d'une trace markovienne tr_k et d'une espérance conditionnelle $E_k: M_k \to M_{k-1}$, fidèle puisque M est de dimension finie.

En procédant par induction à partir du lemme 4, on voit que M_k est libre de rang l sur M_{k-1} et donc $M_{k+1} = \mathrm{End}_{M_{k-1}}(M_k)$ est libre de rang l sur M_k. $\square$

Un cas où la proposition 1 s'applique est celui des algèbres de groupes. Soient G un groupe fini (d'ordre noté $|G|$), H un sous-groupe et $\mathbf{K}$ un corps commutatif de caractéristique nulle. On rappelle que l'algèbre de groupe $\mathbf{K}[G]$ est l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{g\in G} a_g \cdot g \, (a_g \in \mathbf{K})$ où le produit est donné par $g_1 \cdot g_2 = g_1 g_2 (g_1, g_2 \in G)$. Comme $\mathbf{K}$ est de caractéristique nulle, $\mathbf{K}[G]$ est semi-simple (voir [Se]).

L'inclusion $1 \in \mathbf{K}[H] \subseteq \mathbf{K}[G]$ fournit un exemple de paire d'algèbres semi-simples de dimension finie. La fonctionnelle linéaire sur $\mathbf{K}[G]$ définie par

$$\mathrm{tr}\left(\sum_{g\in G} a_g \cdot g\right) = a_1$$

est une trace fidèle dont la restriction à $\mathbf{K}[H]$ est fidèle. L'espérance conditionnelle $E: \mathbf{K}[G] \to \mathbf{K}[H]$ associée s'écrit

$$E\left(\sum_{g\in G} a_g \cdot g\right) = \sum_{g\in H} a_g \cdot g \, .$$

PROPOSITION 2. *Si* $\mathbf{K}$ *est de caractéristique nulle,*

$$[\mathbf{K}[G] : \mathbf{K}[H]] = [G : H] .$$

Cette proposition est en fait bien connue ([J01], [J02]); c'est elle qui justifie l'appellation d'indice. La preuve ci-dessous semble neuve:

Preuve de la proposition 2. Remarquons que $\mathbf{K}[G]$ est libre de rang $[G : H]$ comme $\mathbf{K}[H]$-module à droite: en effet, le choix d'un système de représentants pour les classes latérales gauches de H dans G fournit une base de $\mathbf{K}[G]$ comme $\mathbf{K}[H]$-module à droite. Montrons d'autre part que tr est markovienne de module $[G : H]$ sur $\mathbf{K}[G]$.

Pour cela, considérons $\mathrm{End}_{\mathbf{K}[H]}(\mathbf{K}[G])$ comme une sous-algèbre de l'algèbre $\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}[G]) = \mathrm{Mat}_{|G|}(\mathbf{K})$. Cette dernière algèbre est munie de la trace

$$S \mapsto \frac{1}{|G|} \mathrm{Tr}(S)$$

où Tr est la trace usuelle sur $\mathrm{Mat}_{|G|}(\mathbf{K})$.
Il est alors banal de vérifier que

$$\frac{1}{|G|} \mathrm{Tr}\, \lambda(1) = \mathrm{tr}(1) = 1$$

$$\frac{1}{|G|} \mathrm{Tr}\, \lambda(g) = \mathrm{tr}(g) = 0 \qquad \text{pour} \qquad g \in G \backslash \{1\}$$

$$\frac{1}{|G|} \mathrm{Tr}\, E = \frac{|H|}{|G|} = \frac{\mathrm{tr}(1)}{[G : H]}$$

$$\frac{1}{|G|} \mathrm{Tr}\, \lambda(g) E = \mathrm{tr}(g) = 0 \qquad \text{pour} \qquad g \in G \backslash \{1\} .$$

Par linéarité, on en déduit la propriété annoncée. La proposition 1 s'applique donc et permet de conclure. □

Le résultat ci-dessus est encore valable si $\mathbf{K}$ est de caractéristique p, pour autant que p ne divise pas $|G|$.