# 6. Classification des colorations

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

donner des informations sur les symétries d'une molécule lorsque l'on en connaît le nombre de différents isomères.

La situation de départ est celle d'un groupe $G$ agissant sur un ensemble à $m$ éléments, qui eux-mêmes peuvent être coloriés à l'aide de $n$ couleurs. On demande de déterminer le nombre de colorations de $E$, inéquivalentes par l'action du groupe $G$. La solution donnée par Pòlya s'obtient en appliquant convenablement le théorème de Burnside:

THÉORÈME 5.1. *Le nombre de colorations de l'ensemble* $E$ *à* $n$ *couleurs, inéquivalentes par l'action de* $G$, *est* $Z(G; n, n, ..., n)$.

*Démonstration.* En agissant sur $E$, le groupe $G$ agit également sur l'ensemble des colorations de $E$ à $n$ couleurs, et c'est le nombre d'orbites de cette action qu'il faut déterminer. Par le théorème de Burnside, on est ramené à compter les colorations de $E$ qui sont fixes par un élément donné $g$ de $G$. Mais une coloration n'est invariante par $g$ que si elle est constante sur les cycles de $g$. Il y a donc $n^{j_1+j_2+...+j_m}$ colorations fixes par $g$, et par conséquent $Z(G; n, n, ..., n)$ orbites. C.Q.F.D.

L'application la plus connue est celle du comptage des colliers différents pouvant être formés avec des perles de deux couleurs. La suite des premières valeurs obtenues, en fonction du nombre total de perles, est 2, 3, 4, 6, 8, 13, 18, 30, 46, 78, 126, 224 ... Elle sert souvent d'exemple résistant au traitement par les différences finies.

Une version plus générale, dans laquelle un deuxième groupe agit sur l'ensemble des couleurs, a été donnée par de Bruijn [2]. On en trouve une application intéressante dans [5]: le comptage des différents thèmes dodécaphoniques cycliques, inéquivalents par transposition musicale.

## 6. CLASSIFICATION DES COLORATIONS

Si le groupe $G$ est trivial, il est bien connu que les $n^m$ colorations de l'ensemble $E$ à l'aide de $n$ couleurs peuvent être triées selon les couleurs utilisées. Il suffit de développer $(x_1+x_2+...+x_n)^m$, puisque le coefficient multinomial $(m; i_1, i_2, ..., i_n)$ est le nombre de colorations nécessitant $i_1$ fois la couleur $x_1$, $i_2$ fois la couleur $x_2$, ..., et $i_n$ fois la couleur $x_n$. On dira que de telles colorations ont le poids $(i_1, i_2, ..., i_n)$.

Dans le cas général, on peut appliquer un raisonnement analogue à chaque terme de la formule de Burnside. On doit alors tenir compte du fait que les colorations sont constantes sur les cycles des éléments du groupe $G$.

Si $g \in G$ est de type $(j_1, j_2, \ldots, j_m)$, il faut développer, en lieu et place de $(x_1+x_2+\ldots+x_n)^m$, le polynôme

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^{j_1} \cdot (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^{j_2} \cdot \ldots \cdot (x_1^m+x_2^m+\ldots+x_n^m)^{j_m}.$$

On obtient ainsi une version plus précise du théorème 5.1, qui remplace le nombre de colorations par leur fonction génératrice :

THÉORÈME 6.1. *Le nombre de colorations de poids* $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, *inéquivalentes par l'action de* $G$, *est le coefficient de* $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ *dans*

$$Z(G\,;(x_1+x_2+\ldots+x_n), (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2), \ldots, (x_1^m+x_2^m+\ldots+x_n^m)).$$

Pour obtenir le théorème dans une version encore plus générale, il reste à introduire une fonction génératrice des couleurs $\chi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ quelconque, à la place de $(x_1+x_2+\ldots+x_n)$. De façon pertinente, Pòlya donne à une telle fonction le nom d'*inventaire des figures*. Le raisonnement avec la formule de Burnside est le même que précédemment, et il vient :

THÉORÈME 6.2. *Si l'on colorie les éléments de* $E$ *à l'aide de l'inventaire des figures* $\chi(x_1, \ldots, x_n)$, *les colorations inéquivalentes par l'action de* $G$ *sur* $E$ *ont pour fonction génératrice*

$$Z(G\,;\chi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \chi(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2), \ldots, \chi(x_1^m, x_2^m, \ldots, x_n^m)).$$

A ce degré de généralité, le résultat est d'une souplesse d'utilisation inattendue, comme en témoigne l'exemple qui suit [6], repris en détail dans le livre de Pòlya-Tarjan-Woods [7].

On se propose de compter les *alcools aliphatiques*, qui sont des molécules d'hydrocarbures dans lesquelles la configuration des atomes de carbone est celle d'un arbre. La racine de l'arbre est le radical OH, et la valence du carbone exige que les ramifications soient de degré inférieur ou égal à 3. La figure 1 en donne un exemple.

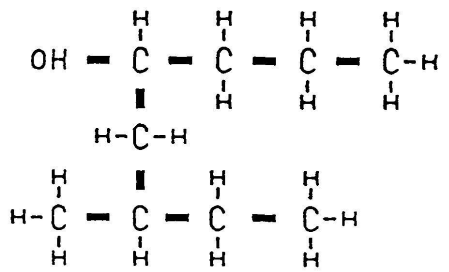

Figure 1

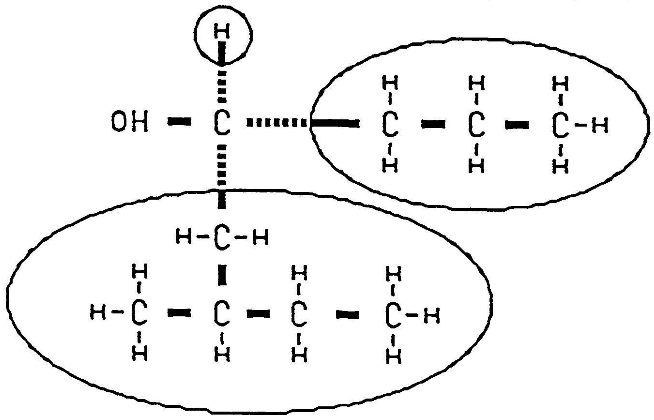

Figure 2

Il s'agit donc de trouver $a(n)$, le nombre d'arbres différents à $n$ nœuds, avec toutes les ramifications de degré 1, 2 ou 3. On convient que $a(0) = 1$, et on note $A(x) = \Sigma a(n)x^n$ la fonction génératrice. On remarque alors qu'à tout arbre on peut en faire correspondre trois autres, qui sont les descendants de l'atome de carbone jouxtant la racine OH (voir Figure 2). Mais l'opération inverse, consistant à reconstruire un arbre à partir de trois autres, exige que l'on identifie les triplets d'arbres qui ne diffèrent que d'une permutation. On en déduit que la solution du problème est donnée par l'indicateur des cycles du groupe $\Sigma_3$, avec comme inventaire des figures la fonction $A(x)$ elle-même. Le théorème 6.2 devient ainsi, si l'on tient compte du nœud supplémentaire:

$$\frac{1}{x}(A(x)-1) = Z(\Sigma_3\,; A(x), A(x^2), A(x^3)) = \frac{1}{6}\left(A(x)^3+3A(x)A(x^2)+2A(x^3)\right).$$

Cette équation fonctionnelle pour la fonction $A(x)$ permet d'en trouver inductivement le développement en série, et les premiers termes sont

$$A(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 8x^5 + 17x^6 + \ldots$$

## RÉFÉRENCES


[1] Burnside, W. *Theory of groups of finite order.* Second edition. Cambridge at the University Press (1911).

[2] de Bruijn, N. G. Color patterns that are invariant under a given permutation of the colors. *Journal of Combinatorial Theory 2* (1967), 418-421.

[3] Frobenius, G. Über die Kongruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmoduls. *Journal de Crelle 101* (1887), 277-293.

[4] Galois, E. *Œuvres mathématiques.* Gauthier-Villars (1897).

[5] Gilbert, E. N. and J. Riordan. Symmetry types of periodic sequences. *Illinois Journal of Mathematics 5* (1961), 657-665.

[6] Pòlya, G. Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen, und chemische Verbindungen. *Acta Mathematica 68* (1937), 145-252.

[7] Pòlya, G., R. Tarjan and D. Woods. *Notes on Introductory Combinatorics.* Birkhäuser-Verlag (1983).

[8] van der Waerden, B. L. *Moderne Algebra.* Erster Teil, zweite Auflage. Berlin, Verlag von Julius Springer (1937).


*(Reçu le 3 septembre 1988)*


François Sigrist

Institut de mathématiques et d'informatique
Université de Neuchâtel
Chantemerle 20
CH-2000 Neuchâtel (Suisse)