

6. POINCARÉ DUALITY

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

The basic philosophy being that flabby sheaves are acyclic for local cohomology, [5] II. 9.3. Thus we can calculate the cohomology sequence (5.1) from the short exact sequence

$$0 \leftarrow \Gamma(U, \Omega^{\bullet \vee \vee}) \xleftarrow{j^*} \Gamma(X, \Omega^{\bullet \vee \vee}) \leftarrow \Gamma_Z(X, \Omega^{\bullet \vee \vee}) \leftarrow 0.$$

According to formula (2.4) we may identify the arrow marked j^* with the linear dual of the arrow marked j_* . Simple evaluation according to (2.4) will be written

$$\langle T, l \rangle, \quad T \in \Gamma_c(X, \Omega^{\bullet \vee}), \quad l \in \Gamma(X, \Omega^{\bullet \vee \vee}).$$

This notation is compatible with the symbol introduced in section 1 taking the biduality morphism (2.6) into account. We leave the remaining details with the reader. Q.E.D.

6. POINCARÉ DUALITY

Let X be a n -dimensional *oriented* smooth manifold. A compactly supported $(n-p)$ -form α on X defines a compact p -chain $P\alpha$ given by

$$(6.1) \quad \langle P\alpha, \beta \rangle = \int_X \alpha \wedge \beta, \quad \beta \in \Gamma(X, \Omega^p).$$

(6.2) **THEOREM.** *For a smooth oriented n -dimensional manifold X , the transformation P induces an isomorphism*

$$P: H_c^{n-p}(X, \mathbb{C}) \rightarrow H_p^c(X, \mathbb{C}), \quad p \in \mathbb{N},$$

from de Rham cohomology with compact support to de Rham homology.

Proof. The following diagram is commutative

$$(6.3) \quad \begin{array}{ccc} \Gamma_c(X, \Omega^{n-p}) & \xrightarrow{P} & D_p^c(X, \mathbb{C}) \\ \downarrow (-1)^n d & & \downarrow (-1)^{p-1} b \\ \Gamma_c(X, \Omega^{n-p+1}) & \xrightarrow{P} & D_{p-1}^c(X, \mathbb{C}) \end{array}$$

as it follows from the relation

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{n-p} \alpha \wedge d\beta, \quad \alpha \in \Gamma_c(X, \Omega^{n-p}), \beta \in \Gamma(X, \Omega^p),$$

using that $\int d(\alpha \wedge \beta) = 0$. Upon replacing X by an arbitrary open subset we obtain a morphism of complexes of sheaves

$$(6.4) \quad P: \Omega^\bullet[n] \rightarrow \Omega^\bullet \vee$$

with the signs of the differentials modified according to the commutative diagram (6.3). The morphism (6.4) is a quasi-isomorphism as it follows by checking the case $X = \mathbf{R}^n$ by means of the Poincaré lemma with and without compact support. As in the proof of (2.1) we conclude that P induces a quasi-isomorphism

$$P: \Gamma_c(X, \Omega^\bullet[n]) \rightarrow \Gamma_c(X, \Omega^\bullet \vee).$$

The second complex may be identified with $D^c(X, \mathbf{C})$ as we have seen in (2.3) and the result follows by passing to homology. Q.E.D.

Let us extend Poincaré duality to the relative groups of an open subset U of X with complement Z in X . With the notation of (6.1), the operator P from (6.4) induces a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Gamma_c(U, \Omega^\bullet[n]) & \rightarrow & \Gamma_c(X, \Omega^\bullet[n]) & \rightarrow & \Gamma_c(Z, \Omega^\bullet[n]) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow P \\ 0 & \rightarrow & D^c(U, \mathbf{C}) & \xrightarrow{j_*} & D^c(X, \mathbf{C}) & \rightarrow & D^c(X, U; \mathbf{C}) \rightarrow 0. \end{array}$$

Again the differentials in the bottom row must be modified as in (6.3). The unmarked vertical arrows are the quasi-isomorphisms of Poincaré duality. The vertical arrow marked P is induced by the algebra of the diagram. Again, from algebra we deduce a *quasi-isomorphism*

$$(6.5) \quad P: \Gamma_c(Z, \Omega^\bullet[n]) \rightarrow D^c(X, U; \mathbf{C}), \quad Z = X - U.$$

Passing to homology we obtain the Poincaré duality isomorphism

$$(6.6) \quad P: H_c^{n-p}(Z, \mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} H_p^c(X, U; \mathbf{C}).$$

The p 'th sheaf cohomology group with compact support $H_c^p(Z, \mathbf{C})$ has the following de Rham representation

$$(6.7) \quad \left\{ \omega \in \Gamma_c(X, \Omega^p) \mid \text{Supp}(d\omega) \subseteq U \right\} \Big/ \begin{array}{l} \left\{ d\nu \mid \nu \in \Gamma_c(X, \Omega^{p-1}) \right\} \\ + \left\{ \omega \in \Gamma_c(X, \Omega^p) \mid \text{Supp}(\omega) \subseteq U \right\} \end{array}$$

as it follows from the exact sequence making up the top row of the diagram above.