L'Enseignement Mathématique, t. 34 (1988), p. 83-105

EXTENSIONS DE MODULES ET COHOMOLOGIE DES GROUPES

par Pierre-Paul GRIVEL

INTRODUCTION

Soit M et N deux modules à gauche sur un anneau R. Il est bien connu que le groupe $\mathrm{Ext}_R^n(N; M)$ classe, à équivalence près, les n-extensions de M par N.

D'autre part soit G un groupe et A un groupe abélien sur lequel G agit à gauche. On définit le n-ième groupe de cohomologie de G à coefficients dans A comme étant le groupe $H^n(G; A) = \mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}G}^n(\mathbf{Z}; A)$ où $\mathbf{Z}$ est considéré avec sa structure de $\mathbf{Z}G$-module trivial; autrement dit on définit les groupes $H^*(G; A)$ comme étant les dérivés du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}; A) = A^G$.

Pour calculer ces groupes on utilise en général un complexe standard, à l'aide duquel on obtient une interprétation des premiers groupes de cohomologie.

Il paraissait intéressant d'obtenir directement l'interprétation de $H^1(G; A)$ et $H^2(G; A)$ à partir de l'interprétation de $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}G}^1(\mathbf{Z}; A)$ et $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}G}^2(\mathbf{Z}; A)$, sans avoir recours au complexe standard.

1. RAPPELS SUR LES EXTENSIONS

1.1. Soit R un anneau. Soit M et N deux R-modules à gauche. Une n-extension de M par N est une suite exacte de R-modules

$$\xi : 0 \to M \xrightarrow{\alpha} E_1 \xrightarrow{\alpha_1} E_2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} E_n \xrightarrow{\alpha_n} N \to 0 .$$

Deux n-extensions ξ et ξ' de M par N sont élémentairement équivalentes s'il existe n morphismes de R-modules $\gamma_i : E_i \to E'_i$ tels que $\gamma_1 \alpha = \alpha'$, $\alpha'_i \gamma_i = \gamma_{i+1} \alpha_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, et $\alpha'_n \gamma_n = \alpha_n$, ou n morphismes de R-modules $\gamma'_i : E'_i \to E_i$ tels que $\gamma'_1 \alpha' = \alpha$, $\alpha_i \gamma'_i = \gamma'_{i+1} \alpha'_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, et $\alpha_n \gamma'_n = \alpha'_n$.