

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1988)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ONT 350 ANS
Autor: Wanner, G.
Kapitel: caténaire
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-56604>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

(«GALILAEO primitus introductam & demonstratam»). Puisque l'on désire $\frac{dy}{dt} = -b$ on obtient par division et par Pythagore ($ds^2 = dx^2 + dy^2$)

$$(6) \quad dx = - \sqrt{-1 - \frac{2gy}{b^2}} dy.$$

Il en résulte que les deux surfaces «infiniment petites » hachurées en figure 7 sont égales pour chaque x . C'est le moment pour Jacob d'écrire la phrase célèbre «Ergo & horum Integralia aequantur», dans laquelle le mot «Intégrale» apparaît pour la première fois dans l'histoire des mathématiques. En d'autres termes, les deux surfaces S_1 et S_2 indiquées en figure 7 doivent aussi être égales. Après intégration, on trouve la solution

$$(7) \quad x = \frac{b^2}{3g} \left(-1 - \frac{2gy}{b^2} \right)^{3/2}$$

et la «Solutio sit linea paraboloeides quadrato cubica...» (Leibniz).

Le problème de l'isochrone fournit donc la première équation différentielle résolue «par quadratures».

LA CATÉNAIRE

«Je ne mets point ici la démonstration, parce que ceux qui entendent ces matières, la trouveront aisément, & qu'il faudroit trop de discours pour la faire comprendre aux autres.»

(Johann Bernoulli, 1692)

A la fin de son article [1] des A.E. 1690, Jacob propose aux lecteurs savants de résoudre le problème de la caténaire, i.e., de la position d'un fil (ou d'une chaîne) flexible. Le problème est résolu dans le courant de 1690 par Leibniz, Huygens et Johann Bernoulli, le jeune frère de Jacob. Les publications de Leibniz (A.E. 1691) [18] et de Johann Bernoulli [4] dans les *Acta Eruditorum* contiennent des solutions et quelques propriétés de cette courbe (longueur, centre de gravité, utilité pour le calcul des logarithmes, etc.), mais pas un mot sur la manière dont elle a été trouvée. Heureusement, Johann Bernoulli est plus explicite dans ses leçons pour l'Hospital [5]: Considérons en un point P de la courbe les forces horizontale H et verticale V (fig. 8).

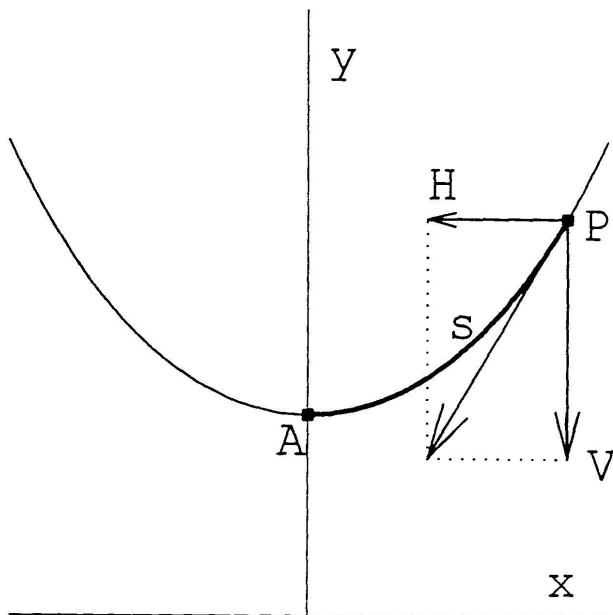


FIGURE 8.
La caténaire.

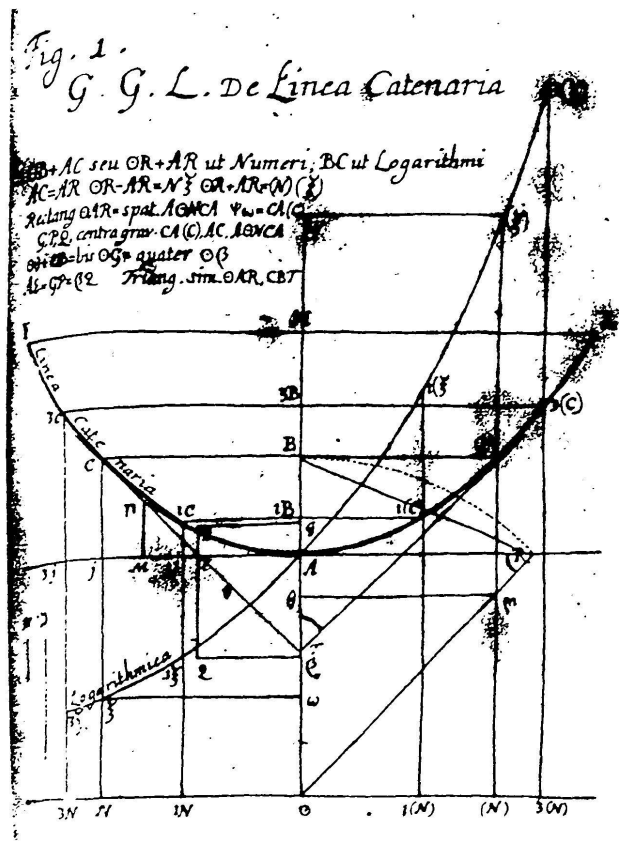


FIGURE 9.
La caténaire (dessin de Leibniz).

Alors

$$H = a, \quad V = q \cdot s$$

avec a et q constants, car il n'y a pas de force horizontale extérieure et V représente le poids de la chaîne AP . On trouve (si on dénote la pente y' par p)

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{V}{H} = \frac{qs}{a}$$

ou après différentiation

$$(8) \quad cdp = ds = \sqrt{1 + p^2} dx.$$

A partir d'ici, les calculs de Johann sont assez compliqués. Nous connaissons aujourd'hui les fonctions hyperboliques et trouvons immédiatement («ergo & horum...»)

$$c \int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int dx \Rightarrow \operatorname{arsinh}(p) = \frac{x - x_0}{c}$$

donc

$$(9) \quad p = \sinh\left(\frac{x - x_0}{c}\right) \Rightarrow y = K + c \cosh\left(\frac{x - x_0}{c}\right).$$

LE DEUXIÈME PROBLÈME DE DEBEAUNE

Cette pièce a été faite en commun par Mr. le Marquis de l'Hospital & par Mr. Bernoulli. C'est pourquoi l'un & l'autre a cru être en droit de se l'attribuer...

(Cramer 1742)

Johann passe l'année 1692 à Paris où il fait la connaissance de Guillaume François Marquis de l'Hospital (1661-1704). Ce dernier lui verse de fortes sommes d'argent en échange de leçons de mathématiques. Pour impressionner son élève, Johann commence aussitôt à résoudre le deuxième problème de Debeaune. Il trouve ([6])

$$(10) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{y - x},$$

pose $z = y - x$ et obtient

$$(11) \quad \frac{zdz}{a - z} = dx.$$

La solution est donc déterminée par la surface de l'hyperbole $\frac{z}{a - z}$.

Donc, si on veut que $z(0) = 0$, on trouve

$$(12) \quad x = -z + a \log \frac{a}{a - z}.$$

LA TRACTRICE

Claudius Perraltus Medicus Parisinus insignis, tum & Mechanicis atque Architectonicis studiis egregius, & Vitruvii editione notus, idemque in Regia scientiarum Societate Gallica, dum viveret, non postremus, mihi & aliis ante me multis proposuit hoc problema, cujus nondum sibi occurrisset solutionem ingenue fatebatur...

(Leibniz, 1693)

Lors du séjour de Leibniz à Paris (1672-1676), le célèbre anatomiste et architecte Claude Perrault lui pose le problème suivant: pour quelle courbe en