

# I) Rappels et définitions; schémas et \$\Sigma\_0\$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1987)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

puisque  $X$  est supposé intersection de quadriques. L'exemple le plus simple est évidemment le volume  $X$  intersection complète de quatre quadriques, où l'on trouve ainsi 512 droites (ce qu'on vérifie directement dans  $G(1, 7)$ ).

De même, si  $X \subset \mathbf{P}^6$  est un tel volume, le degré de la surface réglée formée des droites dans  $X$  est donné par  $t_6(V)$  où  $V = X \cap \mathcal{H}_3$  comme précédemment.

### Première partie: $\mathbf{P}^4$

#### I) RAPPELS ET DÉFINITIONS; SCHEMAS $\Sigma$ ET $\Sigma_0$

##### 1°) $\text{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$ , $Al^k \mathbf{P}^N$ ET FORMULES $k$ -SÉCANTES

On rappelle rapidement les notions introduites dans [24] et [25].

a) Le corps de base est algébriquement clos de caractéristique nulle; on se place sur  $\mathbf{C}$  pour la commodité.

Si  $\text{Hilb}^k \mathbf{P}^N$  désigne le schéma de Hilbert [10] des  $k$ -uplets de  $\mathbf{P}^N$  (sous-schémas de dimension 0 et longueur  $k$ ), on désignera par  $\text{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$  l'ouvert formé des  $k$ -uplets *curvilignes* c'est-à-dire situés sur une courbe non-singulière. L'ouvert  $\text{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$  est en général non dense [15], mais en tout cas non-singulier [24] de dimension  $Nk$ . Il contient l'ouvert  $\text{Hilb}_{\neq}^k \mathbf{P}^N$  des  $k$ -uplets formés de points *distincts* comme ouvert dense.

Les  $k$ -uplets de  $\mathbf{P}^N$  qui sont sous-schémas d'une droite, appelée *axe* du  $k$ -uplet, sont dits *alignés*. Ils forment une sous-variété non-singulière de dimension  $2N + k - 2$ , notée  $Al^k \mathbf{P}^N$ , de  $\text{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$ . On a une fibration naturelle, au-dessus de la grassmannienne des droites:

$$\text{Axe: } Al^k \mathbf{P}^N \rightarrow G(1, N)$$

qui à un- $k$ -uplet aligné fait correspondre son axe. La fibre-type est  $\text{Hilb}^k \mathbf{P}^1 \simeq \mathbf{P}^k$ .

*Exemples et notations.* Un doublet est toujours aligné. Si  $(x, y)$  sont les coordonnées de  $\mathbf{C}^2$ , le triplet d'idéal  $(x^2, xy, y^2)$  n'est pas curviligne; le triplet d'idéal  $(x^3, y + x^2)$  est curviligne mais non aligné. On notera  $\rightarrow$  un doublet de support réduit à un point. Un triplet curviligne de support réduit à un point sera noté  $\overset{3}{\curvearrowright}$  et s'il est aligné, on le notera  $\overset{3}{\rightarrow}$ . Remarquons par exemple que le quadruplet  $\rightarrow \rightarrow$  est aligné, mais celui-ci:  $\rightarrow \uparrow$  ne l'est pas, bien qu'évidemment le réduit associé le soit!

b) Définissons maintenant le cycle des  $k$ -sécantes d'une surface de  $\mathbf{P}^N$ .

Soit  $S \subset \mathbf{P}^N$  une surface et  $i: Al^k \mathbf{P}^N \hookrightarrow \text{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$  l'injection canonique. Comme  $\text{Hilb}^k S$  s'identifie à un sous-schéma de  $\text{Hilb}^k \mathbf{P}^N$  (par exemple [8]), notons  $\text{Hilb}_c^k S$  la trace de  $\text{Hilb}^k S$  sur  $\text{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$ . Le cycle associé  $[\text{Hilb}_c^k S]$  de  $\text{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$  est de dimension  $2k$  et donc le cycle

$$i^* [\text{Hilb}_c^k S]$$

appartient à  $A^{k(N-2)}(Al^k \mathbf{P}^N)$  où  $A^\bullet$  désigne l'anneau de Chow, gradué par la codimension. Soit  $Z$  un cycle fixé dans  $Al^k \mathbf{P}^N$ , de dimension complémentaire. On appellera formule  $k$ -sécante pour  $S$  dans  $\mathbf{P}^N$ , une formule donnant le degré d'un 0-cycle  $Z \cdot i^* [\text{Hilb}_c^k S]$  lorsque le cycle  $Z$  est fixé.

*Exemple.*  $N = 4, k = 4$ ; dans ce cas  $Z$  doit appartenir à  $A^2(Al^4 \mathbf{P}^4)$ . Un exemple de formule quadrisécante pour les surfaces de  $\mathbf{P}^4$  est donc: les quadrisécantes rencontrant une droite fixe. Dans ce cas, on prend  $Z = \text{Axe}^* \sigma$  où  $\sigma \in A^2(G(1, 4))$  est le cycle de Schubert des droites coupant une droite fixe.

Dans la suite de cet article, on ne s'intéressera qu'aux formules tri-sécantes pour une surface. On renvoie à [28] pour les autres cas.

## 2°) PLATITUDE ET ÉQUIVALENCE RATIONNELLE

La proposition 1 démontrée dans ce paragraphe est le cœur de l'article. Elle permet de remplacer  $\text{Hilb}_c^k S$  par  $\text{Hilb}_c^k \Sigma_0$ .

a) Comme d'habitude, si  $V$  est un sous-schéma du schéma  $H$ , on désigne par  $[V]$  le cycle associé. Commençons par montrer le

LEMME 1. Soit  $\bar{U}$  un ouvert de  $\mathbf{C}$  contenant 0 et 1 et soit  $U = \bar{U} - \{0\}$ . Soit  $H$  un schéma.

On se donne un sous-schéma réduit  $Z$  de  $H \times U$  qu'on suppose plat sur  $U$ ; soit  $\bar{Z}$  son adhérence dans  $H \times \bar{U}$ . Si la fibre  $\bar{Z}_0$  est génériquement réduite, on a l'équivalence rationnelle dans  $H$ :

$$[Z_1] \sim [\bar{Z}_0] = [(\bar{Z}_0)_{\text{red}}].$$

*Preuve.* Vu ([14], prop. 1.4) et ([11], I.9.5.9 et I.9.5.10),  $\bar{Z}$  est l'unique sous-schéma relatif de  $H \times \bar{U}$ , plat sur  $\bar{U}$ , dont la restriction à  $U$  est  $Z$ . (De plus  $\bar{Z}$  est réduit). Par définition de l'équivalence rationnelle, vu la platitude de  $\bar{Z}$  sur  $\bar{U}$ , on a  $[\bar{Z}_1] \sim [\bar{Z}_0]$ . Mais  $\bar{Z}_1 = Z_1$  et  $[\bar{Z}_0] = [(\bar{Z}_0)_{\text{red}}]$  par hypothèse, ce qui démontre le lemme.

Donnons maintenant une définition :

*Définition 1.* Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{C}$  et soit  $X/U$  un schéma relatif. On dit que  $X/U$  est  $k$ -plat si le schéma de Hilbert relatif

$$\mathrm{Hilb}_c^k X/U$$

est plat sur  $U$  et réduit.

*Remarque 1.* Le cas le plus évident, qui nous intéressera principalement, est celui où  $X/U$  est isomorphe à un produit  $F \times U$ . Dans ce cas, on a l'isomorphisme  $\mathrm{Hilb}_c^k X/U \simeq (\mathrm{Hilb}_c^k F) \times U$ . Ce schéma relatif étant un produit, est plat. Il suffit donc de supposer  $\mathrm{Hilb}_c^k F$  réduit, ce qui est toujours le cas si  $F$  est non-singulier (car alors  $\mathrm{Hilb}_c^k F$  est aussi non-singulier) ou bien si  $F$  est une surface à singularités ordinaires de  $\mathbf{P}^4$  (voir Annexe 1).

On peut de manière analogue montrer le

**LEMME 2.** Si  $X/U$  est un schéma relatif lisse, le schéma relatif  $\mathrm{Hilb}_c^k X/U$  est également lisse, donc plat et réduit. Ainsi  $X/U$  est  $k$ -plat.

*Preuve.* Soit  $\pi: X \rightarrow U$  la projection et  $x$  un point de  $X$ . Il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  (disons transcendant) de  $x$  et un isomorphisme  $\mathcal{V} \xrightarrow{\sim} U' \times F$  au-dessus d'un voisinage  $U'$  de  $\pi(x)$ , où  $F$  est non-singulier. Alors on a  $\mathrm{Hilb}_c^k \mathcal{V}/U' \simeq (\mathrm{Hilb}_c^k F) \times U'$ ; or  $\mathrm{Hilb}_c^k F$  est non-singulier, d'où la lissité.

b) Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer la

**PROPOSITION 1.** Soit  $\bar{U}$  un ouvert de  $\mathbf{C}$  contenant 0 et 1 et soit  $U = \bar{U} - \{0\}$ . Soit  $H = \mathrm{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$ .

Soit  $X/\bar{U}$  un sous-schéma relatif de  $\mathbf{P}^N \times \bar{U}$ . On suppose :

- a) tout  $k$ -uplet curviligne dans la fibre  $X_0$  est limite de  $k$ -uplets curvilignes dans des fibres  $X_\lambda$ , avec  $\lambda \neq 0$ , de  $X/U$ ;
- b)  $\mathrm{Hilb}_c^k X_0$  est génériquement réduit ;
- c) le schéma relatif  $X/U$  est  $k$ -plat (déf. 1).

Alors on a l'équivalence rationnelle dans  $\mathrm{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$  :

$$[\mathrm{Hilb}_c^k X_1] \sim [(\mathrm{Hilb}_c^k X_0)_{\mathrm{red}}] = [\mathrm{Hilb}_c^k X_0].$$

*Preuve.* Considérons le schéma relatif  $Z/U = \mathrm{Hilb}_c^k X/U$ . Par l'hypothèse c),  $Z$  est plat sur  $U$  et réduit. D'autre part  $Z$  est contenu dans le

schéma relatif  $\text{Hilb}_c^k X/\bar{U}$  et ce dernier est fermé dans  $\text{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N \times \bar{U}$ . Par définition de l'adhérence, on a donc l'inclusion

$$\bar{Z} \subset \text{Hilb}_c^k X/\bar{U}.$$

C'est une inclusion *de schémas* puisque  $\bar{Z}$  est réduit. On en déduit l'inclusion *de schémas* entre les fibres :

$$(1) \quad \bar{Z}_0 \subset \text{Hilb}_c^k X_0.$$

Maintenant l'hypothèse a) signifie précisément l'inclusion  $(\text{Hilb}_c^k X_0)_{\text{red}} \subset \bar{Z}_0$ . Comme  $(\text{Hilb}_c^k X_0)_{\text{red}}$  est contenu dans la fibre en 0 de  $\text{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N \times \bar{U}$ , on a donc l'inclusion

$$(2) \quad (\text{Hilb}_c^k X_0)_{\text{red}} \subset \bar{Z}_0.$$

On a donc montré

$$(3) \quad (\text{Hilb}_c^k X_0)_{\text{red}} \subset \bar{Z}_0 \subset \text{Hilb}_c^k X_0.$$

Or l'hypothèse b) assure que  $\text{Hilb}_c^k X_0$  est génériquement réduit; donc  $\bar{Z}_0$  aussi, d'après (3). Les hypothèses du lemme 1 sont donc satisfaites pour  $Z$  et l'on a ainsi, vu (3):

$$[Z_1] \sim [\bar{Z}_0] = [\text{Hilb}_c^k X_0] = [(\text{Hilb}_c^k X_0)_{\text{red}}].$$

Or par définition même,  $Z_1 = (\text{Hilb}_c^k X/U)_1 = \text{Hilb}_c^k X_1$ . La proposition 1 est donc démontrée.

c) *Nous allons donner pour l'instant comme application de cette proposition, un corollaire technique qui peut être sauté en première lecture. Par singularités ordinaires d'une surface  $S'$  dans  $\mathbf{P}^3$  nous entendons uniquement croisements normaux, points-triples et points-pince.*

PROPOSITION 2. *Soit  $S' \subset \mathbf{P}^3$  une surface à singularités ordinaires, de degré  $n$ . Alors pour tout cycle  $K$  dans  $A^*(\text{Al}^3 \mathbf{P}^3)$ , de dimension 3, le degré du 0-cycle*

$$K \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 S']$$

*est de la forme*

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3}$$

*où  $a_1, a_2, a_3$  sont des constantes ne dépendant que de  $K$ .*

(Comme toujours,  $i: A^3 \mathbf{P}^3 \hookrightarrow \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^3$  désigne l'injection canonique.) Remarquons que  $\text{Hilb}_c^3 S'$  est génériquement réduit par l'Annexe 2:  $S'$  n'a que des singularités ordinaires.

*Preuve.* Soit  $M$  la réunion de  $n$  plans en position générale dans  $\mathbf{P}^3$ , tous transverses à  $S'$ . Soit  $f_0$  une équation de  $S'$  et  $f_2$  une équation de  $M$ . Considérons le sous-schéma relatif  $X/\mathbf{C}$  de  $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{C}$  défini par l'équation

$$(\lambda - 2)f_0 + \lambda f_2 = 0$$

où  $\lambda$  parcourt  $\mathbf{C}$ . On a bien sûr  $X_0 = S'$  et  $X_2 = M$ . Soit  $U$  l'ouvert maximal de  $\mathbf{C}$  tel que  $X/U$  soit lisse au-dessus de  $U$ . Il est non vide et on peut toujours supposer que 1 lui appartient. Le schéma  $X/U$  est  $k$ -plat car il est lisse (lemme 2).

Soit  $\bar{U}_0 = U \cup \{0\}$  et  $\bar{U}_2 = U \cup \{2\}$ . Les lemmes 10 et 11 de l'Annexe 2 montrent que les hypothèses a) et b) de la proposition 1 sont vérifiées: en effet localement au-dessus d'un voisinage de 0 ou 2, le schéma relatif  $X$  est isomorphe aux schémas relatifs  $\Theta$  ou  $\Pi$  des lemmes 10 et 11. Cela résulte de ce que  $S'$  et  $M$  n'ont que des singularités ordinaires. On applique alors deux fois la proposition 1, en remplaçant l'une des deux fois 0 par 2 évidemment, et on trouve donc l'équivalence rationnelle:

$$[\text{Hilb}_c^k X_0] \sim [\text{Hilb}_c^k X_1] \sim [\text{Hilb}_c^k X_2],$$

soit encore

$$[\text{Hilb}_c^k S'] \sim [\text{Hilb}_c^k M].$$

On s'est donc ramené à montrer la proposition pour la réunion de  $n$  plans. Soit  $P_1, P_2 \dots P_n$  les plans dont la réunion est  $M$ ; soit  $k_1, k_2 \dots k_n$  des entiers positifs tels que  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 3$  et soit  $U_{k_1, k_2 \dots k_n}$  l'ensemble des triplets simples ayant  $k_i$  points sur  $P_i$ . D'après le lemme 10 (Annexe 2) le schéma  $(\text{Hilb}_c^3 M)_{\text{red}}$  admet les adhérences  $\overline{U_{k_1, k_2 \dots k_n}}$  comme uniques composantes irréductibles. Appelons « type » d'une telle composante l'ensemble des  $k_i$  non nuls. Ainsi  $(\text{Hilb}_c^3 M)_{\text{red}}$  est formé de

$$\binom{n}{3} \text{ composantes irréductibles de type } \{1, 1, 1\},$$

$$2 \binom{n}{2} \text{ composantes irréductibles de type } \{2, 1\},$$

$$n \text{ composantes irréductibles de type } \{3\}.$$

De plus, deux composantes irréductibles de même type sont évidemment rationnellement équivalentes dans  $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^3$ , comme on le voit en faisant agir  $PGL(3)$  sur les triplets de plans. Ainsi,

$$[\text{Hilb}_c^3 M] = [(\text{Hilb}_c^3 M)_{\text{red}}] = \binom{n}{3} A + \binom{n}{2} B + nC$$

où  $A, B$  et  $C$  sont trois cycles fixés dans l'anneau de Chow de  $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^3$ ; d'où le résultat annoncé.

*Remarque 2.* Le lecteur adaptera sans peine la démonstration pour montrer que pour tout cycle  $K \in A^*(Al^k \mathbf{P}^3)$ , de dimension  $k$ , le degré du 0-cycle  $K \cdot i^* [\text{Hilb}_c^k S']$  est de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + \dots + a_k \binom{n}{k}$$

où les  $a_i$  ne dépendent que de  $K$ .

### 3°) DÉFORMATION DE $S$ EN $\Sigma_0$ ; ÉTUDE DE $\text{Hilb}_c^k \Sigma_0$

Soit  $S$  une surface de  $\mathbf{P}^4$ . La définition donnée en 1) des formules  $k$ -sécantes pour  $S$  oblige à connaître la classe d'équivalence de  $[\text{Hilb}_c^k S]$  dans l'anneau de Chow de  $\text{Hilb}_c^k \mathbf{P}^4$ .

L'idée qu'on va utiliser est de construire un schéma relatif  $\Sigma/C$  avec fibre  $\Sigma_1 = S$ , la fibre  $\Sigma_0$  ayant pour réduit la projection  $S'$  de  $S$  sur un hyperplan générique  $H$ . On essayera alors d'arriver à l'équivalence rationnelle  $[\text{Hilb}_c^k S] \sim [\text{Hilb}_c^k \Sigma_0]$  et d'utiliser la proposition 1. Considérons maintenant un schéma  $F$ . Si  $F$  est non-singulier, l'ouvert  $\text{Hilb}_c^k F$  des  $k$ -uplets simples est dense dans  $\text{Hilb}_c^k F$ : car un  $k$ -uplet curviligne dans  $F$  est aussi contenu dans une courbe non-singulière  $\Delta$  située sur  $F$ ; on le déforme alors en  $k$  points simples sur  $\Delta$ . (Remarquer par contre que  $\text{Hilb}_c^k F$  n'est en général pas dense dans  $\text{Hilb}^k F$ ; voir [15]).

*Remarque 3.* C'est justement la présence de composantes immergées dans  $\Sigma_0$  (de réduit  $S'$ ) qui fait qu'on a  $\text{Hilb}_c^k \Sigma_0$  (ou  $\text{Hilb}_c^k S'$ ) non dense dans  $\text{Hilb}_c^k \Sigma_0$ . En fait, on verra que  $\text{Hilb}_c^k S'$  (qui est l'adhérence de  $\text{Hilb}_c^k S'$ ) est seulement une composante irréductible de  $\text{Hilb}_c^k \Sigma_0$ , lequel scinde en plusieurs composantes. Et c'est l'évaluation de la contribution de chacune de ces composantes dans les formules  $k$ -sécantes qui constitue l'essentiel de la démonstration.

a) Commençons par décrire un procédé général de déformation d'un sous-schéma de  $\mathbf{P}^N$ .

Soit  $Z \subset \mathbf{P}^N$  un schéma réduit et  $Z'$  sa projection sur un hyperplan  $H$  par un point générique  $\omega$ . D'après ([14], prop. 1.4) ou encore ([13], III, ex. 9.8.3), il existe un sous-schéma réduit  $\mathcal{Z}$  de  $\mathbf{P}^N \times \mathbf{C}$ , plat sur  $\mathbf{C}$ , avec pour fibres  $\mathcal{Z}_1 = Z$  et  $(\mathcal{Z}_0)_{\text{red}} = Z'$ . Rappelons pourquoi: On prend pour cela un système de coordonnées homogènes  $(x_0 : x_1 : \dots : x_N)$  pour lequel  $H$  ait pour équation  $x_N = 0$ , le point  $\omega$  étant le point  $(0 : 0 : \dots : 0 : 1)$ . Le schéma a la structure — réduite — de l'adhérence dans  $\mathbf{P}^N \times \mathbf{C}$  de l'image de  $Z \times \mathbf{C}^*$  par le plongement

$$Z \times \mathbf{C}^* \hookrightarrow \mathbf{P}^N \times \mathbf{C}^*$$

$$((x_0 : x_1 : \dots : x_{N-1} : x_N), \lambda) \mapsto ((x_0 : x_1 : \dots : x_{N-1} : \lambda x_N), \lambda).$$

En général, la fibre  $\mathcal{Z}_0$  possède des composantes immergées (voir [13], p. 260).

*Remarque 4.* Si on pose  $\bar{U} = \mathbf{C}$  et  $U = \mathbf{C}^*$ , le schéma relatif  $\mathcal{Z}/U$  est plat puisqu'il est isomorphe au produit  $Z \times U$ .

b) Appliquons ce qui précède à une surface  $S$  à singularités ordinaires de  $\mathbf{P}^4$ . On la projette génériquement en  $S'$  sur un hyperplan  $H$ . La sous-variété  $S'$  possède une courbe-double  $\Gamma$ , des points triples  $M_1, \dots, M_t$  et des points-pinces  $P_1, \dots, P_v$ . Il s'agit d'abord d'établir la structure nilpotente de  $\Sigma_0$ , sachant que  $(\Sigma_0)_{\text{red}} = S'$ . Nous pouvons énoncer deux propositions.

**PROPOSITION 3.** *Avec les notations précédentes, on a l'égalité des sous-schémas de  $\mathbf{P}^4$ :*

$$\Sigma_0 = S' \cup \Gamma^{(1)} \cup M_1^{(2)} \cup \dots \cup M_t^{(2)}$$

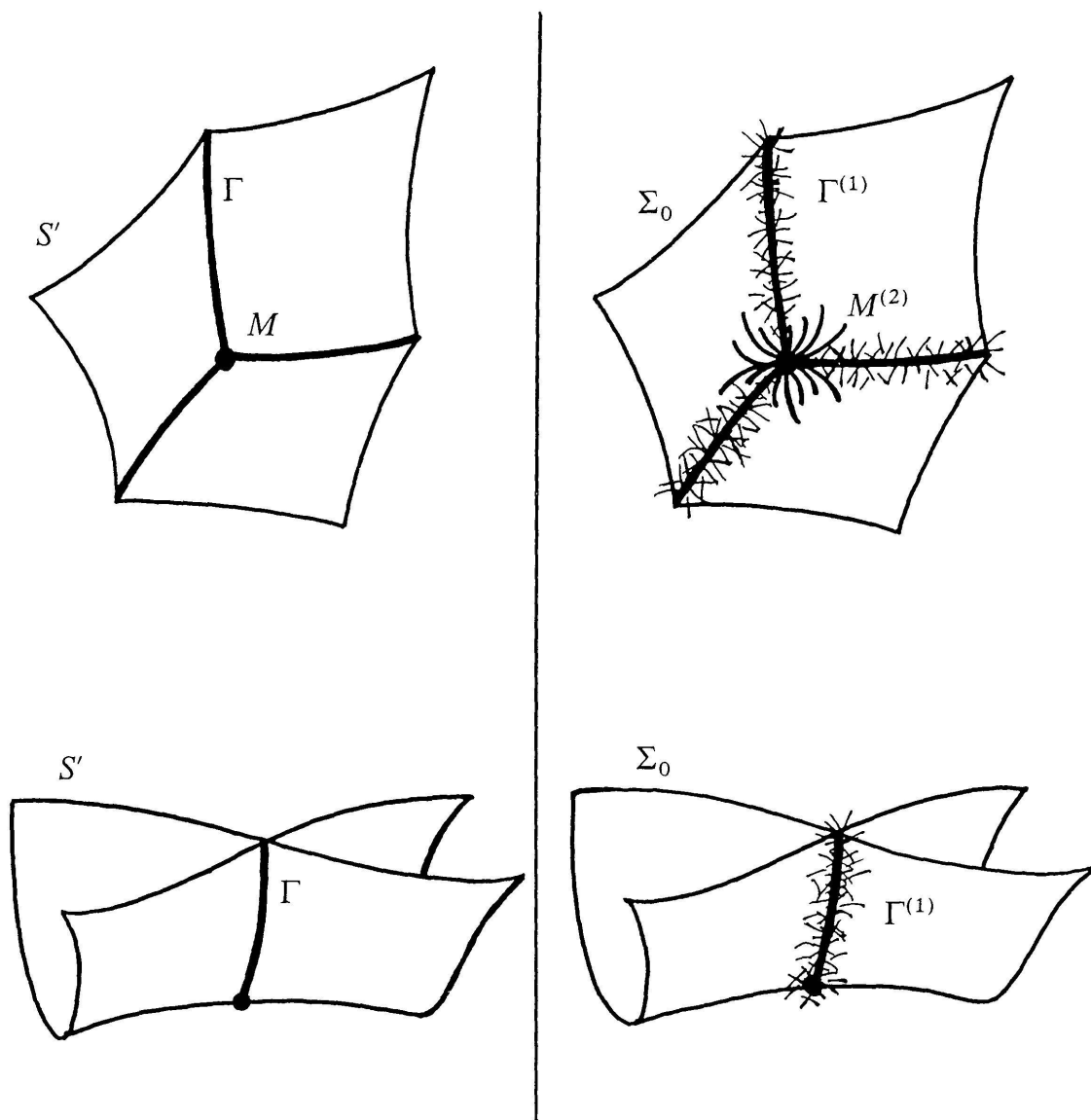
où pour  $V \subset \mathbf{P}^4$ ,  $V^{(i)}$  désigne le  $i$ -ème voisinage infinitésimal de  $V$  dans  $\mathbf{P}^4$ . De plus,  $S' = (\Sigma_0)_{\text{red}} = \Sigma_0 \cap H$ .

Dans le dessin ci-après les nilpotents sont dans  $\mathbf{P}^4$ ; on a représenté les doublets (dans  $\mathbf{P}^4$ ) par des traits courts et les triplets par des traits courbés plus longs.

Avant d'énoncer la proposition suivante, donnons une définition. Celle-ci est motivée par le fait, comme on l'a dit, que pour un schéma quelconque  $F$ , l'ouvert  $\text{Hilb}_c^k F$  n'est en général pas dense dans  $\text{Hilb}_c^k F$ .

*Définition 2.* Appelons  $k$ -uplet « double » (resp. « triple »), une réunion disjointe de points simples et de doublets de support un point (resp. points





simples, doublets de support un point et triplets *curvilignes* de support un point).

Alors à défaut de pouvoir déformer tout  $k$ -uplet curviligne d'un schéma  $F$  en  $k$ -uplets simples, on peut espérer le déformer en  $k$ -uplets doubles, voire triples. C'est justement ce qu'affirme la proposition suivante (en i) pour le schéma  $\Sigma_0$ .

**PROPOSITION 4.** Soit  $\Sigma/\mathbb{C}$  le schéma relatif associé à une surface à singularités ordinaires  $S$  de  $\mathbb{P}^4$ , dont  $S'$  est la projection sur l'hyperplan  $H$ .

i) Tout  $k$ -uplet curviligne dans  $\Sigma_0$ , de support un point-triple  $\{M\}$ , est limite (pour  $k \geq 4$ ) de  $k$ -uplets triples dans  $\Sigma_0$ .

Tout  $k$ -uplet curviligne dans  $\Sigma_0$  de support un point-pince  $\{P\}$ , est limite (pour  $k \geq 3$ ) de  $k$ -uplets doubles dans  $\Sigma_0$ .

Tout  $k$ -uplet curviligne dans  $\Sigma_0$ , de support un point de la courbe double  $\Gamma$  de  $S'$ , est limite (pour  $k \geq 3$ ) de  $k$ -uplets double dans  $\Sigma_0$ .

ii) Tout  $k$ -uplet curviligne dans  $\Sigma_0$  est limite de  $k$ -uplets curvilignes dans des fibres  $\Sigma_\lambda$  de  $\Sigma/\mathbb{C}$  avec  $\lambda \neq 0$ .

iii)  $\text{Hilb}^3 \Sigma_0$  est réduit au voisinage d'un triplet curviligne  $t$  de support un point-triple  $\{M\}$ , lorsque  $t \not\subset S' = (\Sigma_0)_{\text{red}} = \Sigma_0 \cap H$ .

$\text{Hilb}^2 \Sigma_0$  est réduit au voisinage d'un doublet  $d$  de support un point-pince  $\{P\}$ , lorsque  $d \not\subset S'$ .

$\text{Hilb}^2 \Sigma_0$  est réduit au voisinage d'un doublet  $d$  de support un point de  $\Gamma$ , lorsque  $d \not\subset S'$ .

*Preuves des propositions 3 et 4.* Il s'agit essentiellement, par des calculs en coordonnées, de se ramener à l'étude de modèles locaux pour  $\Sigma_0$ , d'abord au voisinage de la courbe double  $\Gamma$ , puis d'un point triple  $M$  et enfin d'un point pince. Or cette étude pour les modèles locaux a été faite dans [24]. Voir l'Annexe 3 pour tous les détails de calcul.

## II) TRISÉCANTES DANS $\mathbf{P}^4$ : LA THÉORIE

Soit  $S$  une surface de  $\mathbf{P}^4$  à singularités ordinaires. Notons  $n$  son degré,  $d$  le degré de la courbe double apparente et  $t$  le nombre de points-triples apparents, dans une projection générique sur un  $\mathbf{P}^3$ .

On regarde le diagramme, où les flèches sont les injections canoniques et les dimensions sont entre parenthèses :

$$\begin{array}{ccc}
 (9) & Al^3 \mathbf{P}^4 & \xrightarrow{i} & \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4 & (12) \\
 & & & \uparrow & \\
 & & & \text{Hilb}_c^3 S & (6) .
 \end{array}$$

Le but de ce § II est de montrer la

**PROPOSITION 5.** Soit  $S$  une surface de  $\mathbf{P}^4$ , d'invariants  $(n, d, t)$ . Pour tout cycle  $Z$  dans  $A^3(Al^3 \mathbf{P}^4)$ , la formule trisécante donnant le degré du 0-cycle  $Z \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 S]$  est de la forme