

III. MÉTHODES TRANSCENDANTES

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1987)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

alors f est une fonction rationnelle. (Le corps \mathbf{C}_p est le complété de la clôture algébrique de \mathbf{Q}_p).

Le théorème de Borel correspond au cas où S est vide. Le principe de la démonstration du théorème ci-dessous est le suivant. On considère, pour k assez grand, le déterminant du Hankel H_N d'ordre N de la suite (ξ_{n+k}) et on majore $|H_N|_v$ pour toutes les places v du corps \mathbf{Q} :

— Si v est ultramétrique et n'appartient pas à S , alors trivialement

$$|H_N|_v \leq 1.$$

— Si $v \in S$ on utilise les inégalités de Cauchy dans \mathbf{C}_p .

— Si v est la valeur absolue ordinaire, on utilise les inégalités de Cauchy dans \mathbf{C} .

Pour k et N assez grands, on aboutit à l'estimation

$$\prod_v |H_N|_v < 1,$$

qui implique $H_N = 0$. D'où la conclusion.

Une démonstration détaillée figure en [2], ainsi que celle du théorème de Polya-Bertrandias, qui généralise le théorème précédent.

III. MÉTHODES TRANSCENDANTES

1. Minoration de $|\xi_n|$

Grâce au théorème de Roth-Ridout, K. Mahler [35] avait obtenu une minoration non effective de $|\xi_n|$ pour une s.r.l. binaire. Les méthodes transcendantes conduisent à des résultats effectifs.

Soit (ξ_n) une s.r.l. donnée par

$$\xi_n = P_1(n) \omega_1^n + \dots + P_k(n) \omega_k^n \quad \text{pour } n \geq 0, \quad \omega_1, \dots, \omega_k \in \mathbf{C} \text{ distincts.}$$

On peut supposer $|\omega_1| \geq |\omega_2| \geq \dots \geq |\omega_k|$. Lorsque $|\omega_1| > |\omega_2|$ on a trivialement

$$|\xi_n| \sim |P_1(n)| |\omega_1|^n$$

donc $|\xi_n| \geq \frac{1}{2} |P_1(n)| |\omega_1|^n$ pour $n \geq n_0$ (effectif).

Minorer $|\xi_n|$ n'est plus aussi facile lorsque ω_1 et ω_2 sont de même module. Considérons en effet le cas le plus simple où (ξ_n) est réelle et donnée par $\xi_n = \omega_1^n + \omega_2^n$.

Si ω_1 et ω_2 sont réels alors $\omega_2 = -\omega_1$, et on a $\xi_n = 2\omega_1^n$ si n est pair et $\xi_n = 0$ sinon. Par contre si ω_1 n'est pas réel, $\omega_2 = \bar{\omega}_1$ et on peut écrire $\omega_1 = \rho e^{i\theta}$, $\omega_2 = \rho e^{-i\theta}$ avec ρ réel > 0 ; alors

$$\xi_n = 2\rho^n \cos(n\theta), \quad \text{avec } 0 < \theta < \pi.$$

Pour minorer ξ_n dans ce cas il faut minorer la quantité

$$\text{Min}_{k \in \mathbf{Z}} \left| n\theta - \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi \right|.$$

Le cas $\theta = \frac{\pi}{2}$ correspond à une suite dégénérée, nous l'excluons. Ainsi, dans le cas non dégénéré, on aboutit à un problème d'approximation diophantienne.

Si f est une fonction de \mathbf{N} dans lui-même qui croît arbitrairement vite, on peut trouver θ tel que, pour une infinité de valeurs de n , il existe k entier avec $\left| n\theta - \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi \right| < 1/f(n)$. Pour obtenir une minoration non triviale de $|\xi_n|$ il est donc nécessaire de faire des hypothèses sur l'approximation du quotient θ/π par des rationnels.

Depuis les travaux de Gel'fond, on sait que de telles hypothèses sont vérifiées lorsque $\cos\theta$ est un nombre algébrique, donc en particulier lorsque ω_1 et ω_2 sont algébriques. Nous nous limiterons donc à l'étude des s.r.l. à valeurs algébriques.

Définissons s par

$$|\omega_1| = \dots = |\omega_s| > |\omega_{s+1}|,$$

et posons $r_j = 1 + \deg(P_j)$ pour $j = 1, \dots, k$.

La première minoration effective a été obtenue — pour les s.r.l. binaires — par A. Schinzel [55]. Un théorème plus général a été ensuite publié en [38], où on montre que sous les hypothèses $s \leq 3$ et $r_1 = \dots = r_s = 1$, il existe des constantes effectives c et n_0 telles que, pour $n \geq n_0$,

$$|\xi_n| \geq |\omega_1|^n n^{-c}, \quad \text{pourvu que } \sum_{j=1}^s P_j \cdot \omega_j^n \neq 0.$$

La démonstration est une application directe des estimations de A. Baker sur les formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques [4].

Depuis ces résultats ont été étendus en [45], où le résultat suivant est démontré.

THÉORÈME. Supposons $s \leq 3$ et qu'au moins un des nombres ω_i/ω_j , $1 \leq i < j \leq s$ ne soit pas une racine de l'unité. Alors il existe des constantes effectivement calculables $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ qui ne dépendent que de (ξ_n) telles que l'on ait

$$|\xi_n| \geq |\omega_1|^n \exp(-C_1(\text{Log } n)^2),$$

pour $n \geq C_2$.

La preuve repose aussi sur les minoration de Baker. Pour $s \leq 3$, on peut donc déterminer effectivement toutes les solutions de l'équation $\xi_n = \alpha$ pour α fixé.

Si on se limite à l'équation $\xi_n = 0$, on montre dans le même article que les indices n peuvent être déterminés effectivement sous les hypothèses: $s = 4$, $|\omega_1| > 1$ et aucun des ω_i/ω_j , $1 \leq i < j \leq 4$, n'est une racine de l'unité.

Dans le cas général, la question suivante est ouverte.

PROBLÈME. Etant donné une s.r.l. entière (ξ_n) , existe-t-il un algorithme permettant de trouver tous les indices n tels que $\xi_n = 0$?

Nous énonçons la conjecture suivante.

CONJECTURE. Il existe un entier positif k tel que, si $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)}$ sont k suites récurrentes linéaires entières quelconques, la propriété

$$\exists(n_1, n_2, \dots, n_k), \quad \xi_{n_1}^{(1)} + \dots + \xi_{n_k}^{(k)} = 0$$

soit indécidable.

Sous certaines hypothèses (voir [45] th. 3), on peut aussi minorer $|\xi_m - \xi_n|$ de manière effective et donc alors — en principe — déterminer les répétitions de la suite (voir [44] pour un exemple).

2. L'équation $\xi_m = \eta_n$

En utilisant encore une estimation sur les formes linéaires de logarithmes, on peut montrer (cf. [41]) le résultat suivant.

THÉORÈME. Soient (ξ_m) et (η_n) deux suites récurrentes linéaires à valeurs algébriques données par

$$\xi_m = P_1(m) \omega_1^m + \dots + P_h(m) \omega_h^m, \quad P_1 \neq 0,$$

et

$$\eta_n = Q_1(n) \rho_1^n + \dots + Q_k(n) \rho_k^n, \quad Q_1 \neq 0.$$

On suppose

$$|\omega_1| > |\omega_2| \geq \dots, \quad |\rho_1| > |\rho_2| \geq \dots, \quad |\omega_1| > 1, \quad |\rho_1| > 1.$$

Alors,

(i) il existe un entier N_1 , effectivement calculable, tel que pour $m+n \geq N_1$ la relation $\xi_m = \eta_n$ implique

$$(*) \quad P_1(m) \omega_1^m = Q_1(n) \rho_1^n;$$

(ii) il existe un entier N_2 , effectivement calculable, tel que si l'équation (*) admet une solution vérifiant $m+n \geq N_1$, alors ω_1 et ρ_1 sont multiplicativement dépendants;

(iii) soit Z l'ensemble des couples (m, n) tels que $\xi_m = \eta_n$, alors:

(a) si P_1 et Q_1 sont de même degré, Z est égal à l'union d'un ensemble fini et d'une union finie de progressions arithmétiques,

(b) si les degrés de P_1 et Q_1 sont distincts et si Z est infini, cet ensemble n'est pas du type précédent et on a même

$$\lim \text{Log}(m_{k+1}/m_k) > 0, \quad \text{si } (m_k, n_k)$$

désigne la suite des points de Z , ordonnée par valeurs croissantes de m .

On peut noter que la preuve de (ii) est élémentaire et que le cas (b) peut se produire: exemple, $\xi_m = 2^m$ et $\eta_n = n 2^n$. De plus, on sait décider si deux nombres algébriques sont multiplicativement indépendants ou non, donc — sous les hypothèses du théorème — on sait décider si Z est fini ou non. En supposant en outre que les $|\omega_i|$ d'une part, et les $|\rho_j|$ d'autre part, sont distincts on peut même déterminer effectivement Z .

Le cas de l'équation $\xi_m = \xi_n$, pour une s.r.l. binaire, a été traité grâce à une méthode analogue par J. C. Parmani et T. N. Shorey [49].

3. Sur le plus grand diviseur premier de ξ_n

Cette question fait l'objet du long article de C. L. Stewart [58], le lecteur désirant plus de détails pourra consulter ce travail. Bien entendu, nous supposons que (ξ_n) est une s.r.l. à valeurs entières. Dans l'écriture

$$\xi_n = P_1(n) \omega_1^n + \dots + P_k(n) \omega_k^n,$$

nous supposons de plus qu'aucun des quotients ω_i/ω_j , $i \neq j$, n'est une racine de l'unité. Enfin le plus grand diviseur d'un entier a sera noté $P(a)$ (avec la convention $P(0) = P(\pm 1) = 1$).

En 1921, Polya a montré que $\limsup P(\xi_n) = \infty$. Grâce à une généralisation p -adique du théorème de Thue-Siegel-Roth-Schmidt (généralisation due à Schlickewei), récemment R. van der Poorten et Schlickewei ont montré [53] qu'en fait $P(\xi_n)$ tend vers l'infini, une preuve indépendante mais voisine a été donné par Evertse [24]. A ce jour, ces preuves sont ineffectives.

Grâce à la théorie des formes linéaires de logarithmes, Stewart a démontré le résultat suivant (cf. [57]).

THÉORÈME. *Si on a $|\omega_1| > |\omega_2| \geq \dots \geq |\omega_k|$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante effective $N = N(\varepsilon, \omega_1, \dots, \omega_k, P_1, \dots, P_k)$ telle que, pour $n \geq N$, on ait*

$$P(\xi_n) > (1 - \varepsilon) \text{Log } n$$

lorsque $\xi_n \neq P_1(n) \omega_1^n$.

Des résultats plus forts ont été démontrés pour les s.r.l. binaires, en particulier par C. L. Stewart et T. Shorey; voir [58] pour plus d'information.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABE, E. *Hopf algebras*. Cambridge Univ. Press, 1980.
- [2] AMICE, Y. *Les nombres p -adiques*. Paris, P.U.F., 1975.
- [3] BACHMANN, P. *Niedere Zahlentheorie*. Zweiter teil, Leipzig, Teubner, 1910.
- [4] BAKER, A. A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms, II. *Acta Arithm.* 24 (1973), 33-36.
- [5] BERSTEL, J. *Transductions and context-free languages*. Stuttgart, Teubner, 1979.
- [6] BERSTEL, J. et M. MIGNOTTE. Deux propriétés décidables des suites récurrentes linéaires. *Bull. Soc. Math. France* 104 (1976), 175-184.
- [7] BERSTEL, J. et REUTENAUER. *Les séries rationnelles et leurs langages*. Paris, Masson, 1984.
- [8] BEUKERS, F. The multiplicity of binary recurrences. *Compositio Math.* 40 (1980), 251-267.
- [9] BEUKERS, F. and R. TIJDEMAN. On the multiplicity of binary complex recurrences. *Compositio Math.* 51 (1984), 193-213.
- [10] BOREVITCH, S. I. et I. R. SCHAFAREVITCH. *Théorie des nombres*. Paris, Gauthier-Villars, 1967.
- [11] BOURBAKI, N. *Eléments de mathématiques. Algèbre, chap. 5*. Paris, Herman, 1959.
- [12] CERLIENCO, L. e F. PIRAS. Risultante, m.c.m. e M.C.D. di due polinomi col metodo delle s.r.l. *Rend. Sem. Fac. Sci., Univ. Cagliari* 50 (1980), 711-717.