

Objektyp: **ReferenceList**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

It will be sufficient to look only at the symmetries of H which take the fibre $L_0 = \{(u, 0)\}$ to itself, and hence are of the form $(u, v) \mapsto (A(u), B(v))$. We already know that there must be a $C \in SO(8)$ such that $B(mu) = C(m) A(u)$ for all $m, u \in Ca$. To show that G is a nontrivial double covering of $SO(9)$, we must find a loop of C 's which lifts to a non-loop of (A, B) 's.

This can be done by using the Moufang identities, just as in the proof of the Triality Principle. Recall from that proof that if x is an imaginary Cayley number of unit length, then $A = L_x$, $B = -L_x$ and $C = L_x R_x$ "works", that is, $-L_x(mu) = L_x R_x(m) L_x(u)$. Now let x describe a semi-circular path in the i, j -plane from i to $-i$. At the beginning of the path, $C(m) = imi$, while at the end of the path $C(m) = (-i)m(-i) = imi$. Thus C describes a loop in $SO(8)$. At the beginning of the path, $(A(u), B(v)) = (iu, -iv)$, while at the end $(A(u), B(v)) = (-iu, iv)$. Hence (A, B) describes a non-loop in G . Thus G is the non-trivial double covering $\text{Spin}(9)$ of $SO(9)$. QED

Here is a further indication of the extent of symmetry of the Hopf fibration $H: S^7 \hookrightarrow S^{15} \rightarrow S^8$. Orient the fibres.

PROPOSITION 7.10. *Let P and Q be any two fibres of H . Then a preassigned orientation preserving rigid motion of P onto Q can be extended to a symmetry of H . In particular, the symmetries act transitively on S^{15} .*

By Lemma 7.7, the symmetries act transitively on fibres, so we may take $P = Q = L_0$. To preassign an orientation preserving rigid motion of L_0 onto itself is to preassign the map $A \in SO(8)$ in the Triality Principle, which then promises the desired symmetry of H . QED

BIBLIOGRAPHY

- [Ca 1] CARTAN, Élie. Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples. *Bull. des Sciences Math.* 49 (1925), 361-374.
- [Ca 2] ———. Certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple. *Annales École Normale* 44 (1927), 345-467.
- [Cu] CURTIS, C. W. The four and eight square problem and division algebras. In *Studies in modern algebra*, A. Albert ed., MAA (1963), 100-125.
- [Es] ESCOBALES, R. H. Riemannian submersions with totally geodesic fibres. *J. Diff. Geom.* 10 (1975), 253-276.
- [Fr] FREUDENTHAL, Hans. *Oktaven, Ausnahmegruppen und Octavengeometrie*. Utrecht (1951).

- [GWZ] GLUCK, Herman, Frank WARNER and Wolfgang ZILLER. Fibrations of spheres by parallel great spheres and Berger's rigidity theorem. To appear.
- [HL] HARVEY, Reese and H. Blaine LAWSON, Jr. Calibrated geometries. *Acta Math.* 148 (1982), 47-157.
- [Ho 1] HOPF, Heinz. Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. *Math. Ann.* 104 (1931), 637-665.
- [Ho 2] ——— Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension. *Fund. Math.* 25 (1935), 427-440.
- [Hu 1] HURWITZ, A. Über die Komposition der quadratischer Formen von beliebig vielen Variablen. *Nachrichten der Konigl. Ges. der Wiss. Gottingen* (1898), 309-316.
- [Hu 2] ——— Über die Komposition der quadratischer Formen. *Math. Annalen* 88 (1923), 1-25.
- [Ja] JACOBSON, N. Composition algebras and their automorphisms. *Rend. d. Cir. Mat. di Palermo* 7 (1958), 55-80.
- [Pe] PENROSE, Roger. The geometry of the universe. In *Mathematics today*, Lynn Steen ed., Springer-Verlag (1978), 83-125.
- [Ra] RANJAN, Akhil. Riemannian submersions of spheres with totally geodesic fibres. *Preprint* (1983).
- [Ro] ROBERT, E. *Composition des formes quadratiques de quatre et de huit variables indépendantes*. Thesis, Zürich (1912).
- [Wol 1] WOLF, J. Geodesic spheres in Grassmann manifolds. *Illinois J. Math.* 7 (1963), 425-446.
- [Wol 2] ——— Elliptic spaces in Grassmann manifolds. *Illinois J. Math.* 7 (1963), 447-462.
- [Won] WONG, Y.-C. Isoclinic n -planes in Euclidean $2n$ -space, Clifford parallels in elliptic $(2n-1)$ -space, and the Hurwitz matrix equations. *Mem. Amer. Math. Soc.* 41 (1961).

(Reçu le 14 janvier 1985)

Herman Gluck
Frank Warner
Wolfgang Ziller

Department of Mathematics
University of Pennsylvania
Philadelphia, 19104-6395 (USA)