§1. DÉFINITIONS ÉQUIVALENTES DE LA MOYENNABILITÉ INTÉRIEURE

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Ensuite, au § 2, nous énumérons quelques *conditions suffisantes* pour qu'un groupe soit intérieurement moyennable (Γ moyennable, Γ faiblement commutatif, ...) ou ne le soit pas (conséquence de la propriété T, existence de sous-groupes libres convenables, ...). Nous étudions aussi le comportement de la moyennabilité intérieure par *extensions* et *produits semi-directs.*

Enfin, le troisième paragraphe est de nature plus *géométrique*, et nous y indiquons de multiples exemples de groupes non intérieurement moyennables: sous-groupes non presque résolubles de $PSL(2, \mathbf{C})$, produits libres, et variantes.

Beaucoup des résultats qui suivent sont déjà connus. Nous les avons répétés en espérant que notre texte puisse être pris comme une *introduction* au sujet. Dans le même but, nous avons systématiquement omis de considérer des groupes munis de topologies non triviales; pour ceci, voir [Pi] et [LR].

Nous remercions chaleureusement G. Skandalis pour l'intérêt qu'il a manifesté à ce travail et pour les nombreuses améliorations qu'il nous a suggérées.

§ 1. Définitions équivalentes de la moyennabilité intérieure

On se donne un groupe (discret) Γ, non réduit à un élément. Pour simplifier la suite, nous supposons Γ dénombrable; mais l'usage de suites généralisées nous permettrait de généraliser sans peine à des groupes plus grands.

Une *moyenne intérieurement invariante* sur Γ est une mesure positive finiment additive de masse totale 1 sur $\Gamma - \{1\}$ qui est invariante par automorphismes intérieurs. On peut envisager une telle moyenne comme une application définie sur les sous-ensembles de $\Gamma - \{1\}$ à valeurs dans $[0, 1]$, ou comme une forme linéaire positive normalisée sur l'espace de Banach $l^\infty(\Gamma - \{1\})$. (Pour l'équivalence, voir [HeS], théorème 20.30.) Nous voulons montrer dans ce paragraphe que Γ possède une moyenne intérieurement invariante si et seulement s'il possède certaines autres propriétés, avant l'énoncé desquelles nous rappelons quelques faits et fixons nos notations.

Le groupe Γ opère dans l'espace de Hilbert $l^2(\Gamma)$ par les *représentations* régulières gauche λ et droite ρ, ainsi que par la représentation adjointe α:

$$\begin{aligned}(\lambda(g)\xi)(h) &= \xi(g^{-1}h),\\ (\rho(g)\xi)(h) &= \xi(hg),\\ (\alpha(g)\xi)(h) &= \xi(g^{-1}hg), \quad g \in \Gamma, \quad \xi \in l^2(\Gamma), \quad h \in \Gamma.\end{aligned}$$

On a $\alpha(g) = \lambda(g)\rho(g) = \rho(g)\lambda(g)$ pour tout $g \in \Gamma$. Nous notons δ la fonction caractéristique de $\{1\}$ dans Γ, et β la restriction de α à l'orthogonal $H_\beta = l^2(\Gamma)\Theta\mathbf{C}\delta$ de δ dans $l^2(\Gamma)$. On a donc $\alpha = \beta \oplus \varepsilon$, où ε désigne la représentation triviale de Γ dans $\mathbf{C}$.

L'espace de Banach $l^1(\Gamma)$ des fonctions sommables sur Γ s'identifie naturellement à un sous-espace (non fermé si Γ est infini) de $l^2(\Gamma)$ invariant par α. Nous notons $l^1(\Gamma)^+$ le cône des fonctions $\eta \in l^1(\Gamma)$ avec $\eta(g) \geqslant 0$ pour tout $g \in \Gamma$.

Nous écrivons $|S|$ le cardinal d'un ensemble fini S et $S\Delta T$ la différence symétrique de deux sous-ensembles S, T de Γ.

En vue de la condition (R) ci-dessous, notons que Γ est à *classes de conjugaison infinies*, ou en abrégé CCI, si et seulement si β ne contient pas ε (au sens fort). En effet, si $\Gamma - \{1\}$ contient une classe de conjugaison finie F, alors H_β contient un vecteur non nul fixé par $\beta(\Gamma)$, à savoir la fonction caractéristique de F. Réciproquement, si le vecteur non nul ξ de H_β est fixé par $\beta(\Gamma)$, alors l'ensemble fini $\{g \in \Gamma \mid |\xi(g)| > \frac{1}{n}\}$ est non vide pour un entier n assez grand, et il est réunion de classes de conjugaison.

Nous écrivons P_δ la projection orthogonale de $l^2(\Gamma)$ sur $\mathbf{C}\delta$. Si $M, \ldots, N$ sont des ensembles d'opérateurs sur $l^2(\Gamma)$, alors $C^*(M, \ldots, N)$ désigne la C^*-algèbre engendrée par la réunion $M \cup \ldots \cup N$ dans l'algèbre d'opérateurs $L(l^2(\Gamma))$.

On dit qu'une bijection $\varphi: S \to T$ entre sous-ensembles de Γ est *intérieure par morceaux* s'il existe un sous-ensemble fini $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset \Gamma$ avec $\varphi(g) \in \{f_1 g f_1^{-1}, \ldots, f_k g f_k^{-1}\}$ pour tout $g \in S$, c'est-à-dire s'il existe une partition $S = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant k} S_j$ avec $\varphi(g) = f_j g f_j^{-1}$ pour $g \in S_j$ et $j \in \{1, \ldots, k\}$.

THÉORÈME 1. *Si Γ est un groupe dénombrable, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(M) *Il existe une moyenne intérieurement invariante sur* Γ.

(D_1) *Il existe une suite* $(\eta_n)_{n \geqslant 1}$ *dans* $l^1(\Gamma)^+$ *avec*

1°) $\eta_n(1) = 0$ *et* $\|\eta_n\|_1 = 1$ *pour tout* $n \geqslant 1$,

2°) $\lim_{n \to \infty} \|\alpha(g)\eta_n - \eta_n\|_1 = 0$ *pour tout* $g \in G$.

(D_2) *Il existe une suite* $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ *dans* $l^2(\Gamma)$ *avec*

1°) $\xi_n(1) = 0$ *et* $\|\xi_n\|_2 = 1$ *pour tout* $n \geqslant 1$,

2°) $\lim_{n \to \infty} \|\alpha(g)\xi_n - \xi_n\|_2 = 0$ *pour tout* $g \in G$.

(F) *Il existe une suite* $(F_n)_{n \geqslant 1}$ *de sous-ensembles finis non vides de* $\Gamma - \{1\}$ *telle que* $\lim_{n \to \infty} |(gF_ng^{-1})\Delta F_n \| F_n|^{-1} = 0$ *pour tout* $g \in \Gamma$.

(R) *La représentation* β *de* Γ *contient faiblement* ε.

(P) *On a* $P_\delta \notin C^*(\alpha(\Gamma))$.

(Ta) *Il n'existe pas de partition* $\Gamma - \{1\} = S_1 \coprod S_2$ *qui soit paradoxale, c'est-à-dire telle que la partie* S_j *soit donnée avec une bijection* $\varphi_j : \Gamma - \{1\} \to S_j$ *intérieure par morceaux* $(j = 1, 2)$.

Preuve. Nous établissons les équivalences

$$\begin{array}{ccccc} (M) & \overset{(1)}{\Leftrightarrow} & (D_1) & \overset{(2)}{\Leftrightarrow} & (D_2) \\ (3)\Updownarrow & & (4)\Updownarrow & & (5)\Updownarrow \\ (Ta) & & (F) & & (R) \overset{(6)}{\Leftrightarrow} (P)\,. \end{array}$$

D'autres cheminements sont possibles. Par exemple, l'implication $(D_2) \Rightarrow (Ta)$ se montre comme le « lemme des 14 ε »: voir le lemme 6.2.2 de [MvN] ou le lemme 4.3.3 de [Sa]. Voir aussi [Pa] pour $(P) \Rightarrow (M)$.

(1) Preuve de $(M) \Leftrightarrow (D_1)$. L'équivalence est due à Effros [E], qui reprend un argument maintenant bien connu de Day (théorème 1 du N° 5 dans [Da] — voir aussi [Gr], § 2.4 et [Ey], § III). Le fait essentiel ici est que l'ensemble des vecteurs de norme 1 dans $l^1(\Gamma - \{1\})^+$ est dense dans l'ensemble des moyennes (= formes linéaires positives normalisées) sur $l^\infty(\Gamma - \{1\})$ pour la topologie faible $\sigma(l^\infty(\Gamma - \{1\})^*, l^\infty(\Gamma - \{1\}))$.

(2) Preuve de $(D_1) \Leftrightarrow (D_2)$. Si $(\eta_n)_{n \geqslant 1}$ est comme dans (D_1), on pose $\xi_n(g) = (\eta_n(g))^{1/2}$ et on obtient (D_2). Réciproquement, si $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ est comme dans (D_2), on pose $\eta_n(g) = |\xi_n(g)|^2$ et on obtient (D_1). Les conditions (2°) résultent de l'inégalité de Hölder et des inégalités suivantes, valables pour $a, b, p \in \mathbf{R}$ avec $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $p \geqslant 1$ (ici $p = 2$):

$$|a - b|^p \leqslant |a^p - b^p| \leqslant p\,|a - b\|a^{p-1} + b^{p-1}|\,.$$

On laisse au lecteur le plaisir de remplacer (D_2) par (D_p) dans l'énoncé.

(3) Preuve de $(M) \Leftrightarrow (Ta)$. Pour l'application $(M) \Rightarrow (Ta)$, on montre banalement la contraposée. Supposons en effet qu'il existe une partition $\Gamma - \{1\} = S_1 \coprod S_2$ et des bijections $\varphi_j : \Gamma - \{1\} \to S_j$ intérieures par morceaux

($j=1, 2$). S'il existait une moyenne intérieurement invariante μ sur Γ, on aurait $\mu(\Gamma-\{1\}) = \mu(S_j)$, et $1 = \mu(\Gamma-\{1\}) = \mu(S_1) + \mu(S_2) = 2$ qui est absurde. Donc la condition (M) n'est pas vérifiée.

L'implication $(Ta) \Rightarrow (M)$ est un cas particulier d'un résultat de Tarski (théorème 16.12 (ii) de [Ta]) pour lequel nous renvoyons à une rédaction expositoire motivée par le présent travail [HaS].

La négation de la condition (Ta) admet plusieurs variantes. Nous renvoyons à [HaS] pour certaines d'entre elles, mais en citons néanmoins une qu'on peut dégager de [MvN].

(Ta') Il existe $S \subset \Gamma - \{1\}$, un entier $n \geqslant 2$ et $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \Gamma$ avec les $a_j S a_j^{-1}$ disjoints deux à deux ($1 \leqslant j \leqslant n$) et avec $\Gamma - \{1\} = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n-1} b_k S b_k^{-1}$.

(4) Preuve de $(D_1) \Leftrightarrow (F)$. Il est évident que (F) implique (D_1). En effet, si $(F_n)_{n \geqslant 1}$ est comme dans (F), on pose $\eta_n = |F_n|^{-1}\chi_n$ où χ_n est la fonction caractéristique de F_n, de sorte que $\| \alpha(g)\eta_n - \eta_n \|_1 = | gF_n g^{-1} \Delta F_n \| F_n |^{-1}$ pour tout $g \in \Gamma$.

L'implication $(D_1) \Rightarrow (F)$ suit sa « variante moyennable » due à Følner [Fo], simplifiée par Namioka [Na], et reformulée par Connes (N° 2.1 de [C1]). Répétons ceci:

LEMME. *Pour tout nombre réel* $a > 0$, *notons* $E_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *la fonction caractéristique de* $]a, \infty[$. *Soit* S *un ensemble et soit* $l^1(S)^+$ *le cône des fonctions sommables de* S *dans* $\mathbf{R}_+$.

On se donne $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_k \in l^1(S)^+$ *avec* $\eta_0 \neq 0$ *et* $\varepsilon > 0$. *Si* $\| \eta_j - \eta_0 \|_1 < \varepsilon \| \eta_0 \|_1$ *pour* $j = 1, \ldots, k$, *alors il existe* $a > 0$ *avec* $E_a(\eta_0) \neq 0$ *et*

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \| E_a(\eta_j) - E_a(\eta_0) \|_1 \leqslant \varepsilon \| E_a(\eta_0) \|_1 .$$

Preuve du lemme. On a pour $t, t' \in \mathbf{R}_+$

$$\int_0^\infty | E_a(t) - E_a(t') | \, da = | t - t' |$$

donc pour $\eta, \eta' \in l^1(S)^+$

$$\int_0^\infty \| E_a(\eta) - E_a(\eta') \|_1 \, da = \| \eta - \eta' \|_1$$

par Fubini. Par suite

$$\int_0^\infty \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \| E_a(\eta_j) - E_a(\eta_0) \|_1 \, da = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \| \eta_j - \eta_0 \|_1 \leqslant \varepsilon \| \eta_0 \|_1$$
$$= \varepsilon \int_0^\infty \| E_a(\eta_0) \|_1 \, da$$

et il existe $a > 0$ avec les propriétés voulues. □

Preuve de $(D_1) \Rightarrow (F)$. On se donne $g_1, ..., g_k \in \Gamma$ et $\varepsilon > 0$, et on choisit δ avec $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{k}$. Si Γ vérifie (D_1), il existe un vecteur unité $\eta \in l^1(\Gamma - \{1\})^+$ avec $\| \alpha(g_j)\eta - \eta \|_1 < \delta$ pour $j = 1, ..., k$. Vu le lemme (appliqué à $\eta_0 = \eta$ et $\eta_j = \alpha(g_j)\eta$), il existe $a > 0$ avec $E_a(\eta) \neq 0$ et

$$\| E_a(\alpha(g_j)\eta) - E_a(\eta) \|_1 \leqslant k\delta \| E_a(\eta) \|_1 < \varepsilon \| E_a(\eta) \|_1$$

pour $j = 1, ..., k$. Soit $F = \eta^{-1}(]a, \infty[) \subset \Gamma - \{1\}$ le support de $E_a(\eta)$, qui est non vide car $E_a(\eta) \neq 0$. Le support de $E_a(\alpha(g_j)\eta)$ est $g_j F g_j^{-1}$ et l'inégalité précédente implique

$$| g_j F g_j^{-1} \Delta F | = \| E_a(\alpha(g_j)\eta) - E_a(\eta) \|_1 < \varepsilon | F |$$

pour $j = 1, ..., k$. On obtient une suite de Følner en variant le sous-ensemble fini $\{g_1, ..., g_k\}$ de Γ et le nombre ε.

Pour un résultat plus général, voir [Ro].

(5) *Preuve de* $(D_2) \Leftrightarrow (R)$. Cette équivalence n'est qu'une reformulation. En effet, (R) signifie qu'il existe une suite $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ de vecteurs de norme 1 dans $l^2(\Gamma)\ominus\mathbf{C}\delta$ telle que $\lim_{n\to\infty} (\beta(g)\xi_n | \xi_n) = 1$ pour tout $g \in \Gamma$. Et ceci s'écrit aussi $\lim_{n\to\infty} \| \beta(g)\xi_n - \xi_n \|_2 = 0$, vu l'identité $\| \xi' - \xi \|_2^2 = 2 - 2Re(\xi' | \xi)$ pour deux vecteurs ξ' et ξ de norme unité.

(6) *Preuve de* $(R) \Leftrightarrow (P)$. D'abord une observation générale: soit $\sigma: A \to L(H_\sigma)$ une représentation d'une C^*-algèbre A contenant faiblement une représentation $\pi: A \to L(H_\pi)$, et soit P la projection orthogonale de $H_\sigma \oplus H_\pi$ sur H_π; alors $P \notin (\sigma\oplus\pi)(A)$.

En effet, s'il existait $a \in A$ avec $P = (\sigma\oplus\pi)(a)$, on aurait $\sigma(a) = 0$ et $\pi(a) = 1$, en contradiction avec l'hypothèse de contenance faible $\mathrm{Ker}(\sigma) \subset \mathrm{Ker}(\pi)$. Pour l'équivalence entre cette définition de la contenance faible et celle utilisée ci-dessus en (5), voir si nécessaire les N^os 3.4.4-5 et 18.1.3-4 de [Di1].

L'implication $(R) \Rightarrow (P)$ résulte de cette observation (pour $\sigma = \beta$ et $\pi = \varepsilon$). Avant de montrer la réciproque, introduisons la condition

(Q) Il existe une famille finie $\{g_1, ..., g_k\} \subset \Gamma$ et un entier $n \geqslant 1$ tels que, pour tout vecteur unité $\xi \in H_\beta = l^2(\Gamma) \ominus \mathbf{C}\delta$, on ait

$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Re}(\beta(g_j)\xi \mid \xi) \leqslant k - \frac{1}{n}.$$

Preuve de $(Q) \Rightarrow$ *non*(P). Supposons que Γ satisfait (Q) et posons

$$X = \sum_{j=1}^{k} \alpha(g_j) + \alpha(g_j)^* \in C^*(\alpha(\Gamma)) \subset L(l^2(\Gamma)).$$

Cet opérateur autoadjoint laisse invariants les sous-espaces H_β et $H_\varepsilon = \mathbf{C}\delta$ de $l^2(\Gamma)$. La condition (Q) exprime que sa compression X_β à H_β vérifie $X_\beta \leqslant 2\left(k - \frac{1}{n}\right)$, et sa compression à H_ε est évidemment $2k$. La fonction f définie par $f(t) = 1$ pour $t \leqslant 2\left(k - \frac{1}{n}\right)$ et $f(2k) = 0$ est donc continue sur le spectre de X, et on peut identifier X_β et $f(X)$. Par suite $X_\beta \in C^*(\alpha(\Gamma))$ et $P_\delta = \frac{1}{2k}(X - X_\beta) \in C^*(\alpha(\Gamma))$, de sorte que la condition (P) n'est pas satisfaite.

Preuve de $(P) \Rightarrow (R)$. Si la condition (P) est satisfaite, la négation de (Q) l'est aussi: pour toute famille finie $\{g_1, ..., g_k\}$ de Γ, il existe une suite $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ de vecteurs unité dans H_β avec $\lim_{n \to \infty} (\beta(g_j)\xi_n \mid \xi_n) = 1$ pour $j = 1, ..., k$. Ceci implique bien que la condition (R) est vérifiée.

Cette preuve nous a été communiquée par G. Skandalis; elle s'inspire de la preuve de $(d) \Rightarrow (c)$, pour le théorème 2.1 de [C2].

La preuve du théorème 1 est ainsi achevée. On dit qu'un groupe $\Gamma \neq \{1\}$ est *intérieurement moyennable* s'il satisfait les conditions du théorème. On convient que le groupe réduit à un élément est intérieurement moyennable.

* * *

Terminons ce paragraphe par quelques observations sur la propriété gamma.

1) Si M est un ensemble d'opérateurs sur $l^2(\Gamma)$, nous notons M'' l'algèbre de von Neumann qu'il engendre. Considérons le cas particulier d'un groupe Γ

qui est CCI, c'est-à-dire le cas où $\lambda(\Gamma)''$ est un facteur, ou encore autrement dit le cas où $C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma))$ agit irréductiblement sur $l^2(\Gamma)$. On sait que l'intersection d'une C^*-algèbre irréductible avec l'algèbre $\mathscr{K}$ des opérateurs compacts est ou bien nulle, ou bien égale à $\mathscr{K}$ (corollaire 4.1.10 de [Di1]). Par suite (P) est équivalent pour un groupe CCI à

(P') $\quad \mathscr{K} \cap C^*(\alpha(\Gamma)) = \{0\}$.

D'autre part, un résultat de Connes (théorème 2.1 de [C2]) exprime que $\lambda(\Gamma)''$ possède la propriété gamma si et seulement si

(C) $\quad \mathscr{K} \cap C^*(\lambda(\Gamma)'', \rho(\Gamma)'') = \{0\}$.

Enfin, on a évidemment

$$C^*(\alpha(\Gamma)) \subset C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma)) \subset C^*(\lambda(\Gamma)'', \rho(\Gamma)'') .$$

Par suite, si le facteur $\lambda(\Gamma)''$ possède la propriété gamma, alors le groupe Γ est intérieurement moyennable. Cette implication est à l'origine du travail d'Effros, comme nous l'avons déjà signalé dans l'introduction.

2) Soit Γ un groupe CCI satisfaisant la condition (F) avec de plus $\sup |F_n| < \infty$, par exemple un groupe faiblement commutatif (voir § 2). Pour tout $n \geqslant 1$, notons χ_n la fonction caractéristique de F_n, qui est un élément de trace nulle dans le facteur $\lambda(\Gamma)''$. Pour tout $g \in \Gamma$, il existe un entier n_g avec $gF_ng^{-1} = F_n$, donc tel que g et χ_n commutent dans $\lambda(\Gamma)''$, pour $n \geqslant n_g$. Par suite $\lambda(\Gamma)''$ possède la propriété gamma (proposition 1.10 de [Di2]).

On peut sans doute encore montrer que $\lambda(\Gamma)''$ possède la propriété gamma lorsque Γ est un groupe CCI satisfaisant la « condition de Følner forte » suivante:

(F_f) Il existe une suite $(F_n)_{n \geqslant 1}$ de sous-ensembles finis non vides de $\Gamma - \{1\}$ telle que, pour tout $g \in \Gamma$, il existe un entier n_g avec $gF_ng^{-1} = F_n$ pour $n \geqslant n_g$.

3) Pour d'autres relations entre la moyennabilité intérieure de Γ et les propriétés de $\lambda(\Gamma)''$, voir [Ch1].

§ 2. CONDITIONS SUFFISANTES

Rappelons qu'un groupe satisfait la *propriété T de Kazhdan* si la représentation triviale ε (de dimension 1) est isolée dans le dual unitaire du groupe, ou encore si toute représentation unitaire du groupe contenant