§3. Un peu de géométrie globale

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

§ 3. Un peu de géométrie globale

On appelle géodésique d'une s.e.s.c. toute courbe minimisant la longueur entre deux quelconques de ses points assez proches.

Il est évident qu'une géodésique d'une s.e.s.c. correspond (dans toute carte) à un segment de droite euclidienne qui peut, le cas échéant, être brisée en un point singulier; elle y forme alors un angle $\geqslant \pi$. En particulier une géodésique ne passe jamais par une singularité conique dont la courbure concentrée est positive (car l'angle total est $< 2\pi$).

Proposition 1. *Soit S une s.e.s.c. complète.*

i) *Si $p, q \in S$ il existe une géodésique de longueur $d(p; q)$ reliant p à q.*

ii) *Toute classe d'homotopie peut être représentée par une géodésique de longueur minimale.*

Cette proposition est vraie dans le cas beaucoup plus général des « Espaces de longueurs » (cf. [4], page 6, pour une preuve).

Proposition 2. *Toute s.e.s.c. compacte admet une triangulation géodésique telle que chaque point singulier soit un sommet et chaque arête soit incidente à deux faces différentes.*

(On appellera « normale » une telle triangulation, l'existence de triangulations normales montre que l'exemple 1 du § 2 est, en fait, le cas général.)

Preuve. Soit $\{U_\alpha\}$ un recouvrement de S par des ouverts isométriques à un disque du plan euclidien ou du cône standard. Choisissons $F_\alpha \subset U_\alpha$ un fermé dont le bord est une ligne polygonale et opérons ce choix de sorte que les F_α recouvrent encore S. Si $F_\alpha \cap F_\beta$ n'est pas vide, c'est un fermé dont le bord est polygonal; il est donc possible de trianguler les F_α de façon que toutes les intersections $F_\alpha \cap F_\beta$ non vides soient des réunions de triangles. Il ne reste qu'à subdiviser cette triangulation pour obtenir la triangulation voulue.

Proposition 3 (Formule de Gauss-Bonnet). *Si S est une s.e.s.c. compacte (sans bord) avec singularités en $x_1, x_2, \dots, x_n$ d'angle $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_n$ alors*

$$\sum_i k_i = 2\pi\chi(S) \, (\text{où } k_i = 2\pi - \theta_i) \, .$$

Preuve. Choisissons une triangulation normale T. Si q est un sommet de T, posons

$$\theta_q = \begin{cases} \theta_i & \text{si} \quad q = x_i \\ 2\pi & \text{si} \quad q \text{ est un point régulier}. \end{cases}$$

Posons également $k_q = 2\pi - \theta_q$.

Soient $a; b; c$ respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces de T. Comme T est une triangulation, on a $2b = 3c$ donc

$$2\pi\chi(S) = 2\pi a - 2\pi b + 2\pi c = 2\pi a - \pi c .$$

Chaque triangle est un triangle euclidien, donc

$$\pi b = \sum \theta_q$$

(la somme étant prise sur l'ensemble des sommets de T). On a donc

$$2\pi\chi(S) = 2\pi a - \sum_q \theta_q = \sum_q (2\pi - \theta_q) = \sum_i (2\pi - \theta_i) = \sum_i k_i .$$

COROLLAIRE 1. *Si S est une s.e.s.c. homéomorphe à la sphère S^2, alors il existe au moins trois singularités de courbure concentrée positive.*

Preuve. k_i est strictement inférieur à 2, donc s'il existe moins de trois singularités à courbure positive, on a

$$\sum_i k_i < 4\pi = 2\pi\chi(S) .$$

COROLLAIRE 2. *Si S est une s.e.s.c. dont toutes les singularités ont une courbure concentrée négative, alors une géodésique minimale reliant deux points $p, q \in S$ est unique dans sa classe d'homotopie relative.*

Preuve. Quitte à passer au revêtement universel, on peut supposer S simplement connexe. S'il existait deux géodésiques reliant p à q, elles borderaient un (ou plusieurs) disque à bord polygonal dont au plus deux angles sont inférieurs à π. En recollant deux exemplaires de ce disque sur leur bord on obtiendrait une s.e.s.c. homéomorphe à S^2 avec moins de trois points coniques à courbure concentrée positive.