§1. Introduction

L'Enseignement Mathématique, t. 32 (1986), p. 57-77

REPRÉSENTATION DE GELFAND-GRAEV ET IDENTITÉS DE BARNES LE CAS DE GL_2 D'UN CORPS FINI

par Anna HELVERSEN-PASOTTO

§ 1. INTRODUCTION

Le but de cet article est d'expliquer comment l'étude de la représentation de Gelfand-Graev du groupe GL_2 d'un corps fini nous a amenés aux identités de Barnes (i) et (iv) de notre publication [4] de 1978. Une autre approche — par modèles de Weil — a été trouvée par J. Soto Andrade en 1979 et est publiée dans [7]. Cette dernière a été adaptée au cas d'un corps local non-archimédien par W. Li, c.f. [8].

Voici une description de notre méthode: Soit F le corps fini à q éléments et $G = GL(2, F)$ le groupe général linéaire des 2×2 matrices inversibles à coefficients dans F. Pour $b \in F$, posons

$$u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \{u(b) \mid b \in F\}.$$

Soit ψ un caractère additif non-trivial de F à valeurs complexes. On pose $\lambda(u(b)) = \psi(b)$, pour tout $b \in F$, et

$$V = \mathrm{Ind}_U^G(\lambda);$$

cette représentation induite porte le nom de « représentation de Gelfand-Graev » dans un cadre plus général, c.f. [9] et [11], et l'on sait que son algèbre d'entrelacement $A = \mathrm{End}_G(V)$ est commutative; elle s'identifie à une sous-algèbre de l'algèbre du groupe $\mathbf{C}$ [G]; ici $\mathbf{C}$ désigne le corps des nombres complexes.

Nous décomposons l'algèbre A, suivant les caractères centraux de G, en somme directe de $q - 1$ sous-algèbres A_α et nous déterminons la structure de chaque composante en termes de générateurs et relations; ceci met d'ailleurs la commutativité en évidence. Une première description est donnée en proposition 1, ici les générateurs sont paramétrés par les éléments du groupe multiplicatif du corps F.

Par une « transformation de Mellin », nous introduisons de nouveaux générateurs, paramétrés par les caractères multiplicatifs du corps F. La structure de l'algèbre A_α est donnée par un seul type de relations (5), c.f. théorème 1.

La table des caractères du groupe G nous permet de déterminer les homomorphismes d'algèbres de A_α dans $\mathbf{C}$; les relations (5) donnent ainsi lieu à des identités de sommes de Gauss; la série principale (resp. discrète) amène à l'identité (i) (resp. (iv)) de notre publication [4].

Dans une deuxième partie de ce travail (§§ 5 et 6) nous changeons de point de vue:

La démonstration directe des identités (i) et (iv) de notre publication [4], nous permet de nous « débarrasser » de l'usage de la table des caractères de G. Nous parachutons la définition de certains « homomorphismes » en donnant leurs valeurs sur les générateurs et nous démontrons qu'il s'agit effectivement d'homomorphismes d'algèbres de A dans $\mathbf{C}$ en vérifiant que la relation (5) est respectée, ce qui revient à utiliser les identités de Barnes (i) et (iv).

Un calcul de la trace de A_α nous permet ensuite de prouver que les homomorphismes ainsi obtenus constituent une liste complète et sans répétitions des homomorphismes d'algèbres de A_α dans $\mathbf{C}$.

Une méthode partiellement analogue a été appliquée au cas de $GL(3, F)$ par B. Chang dans [1]. L'auteur détermine des générateurs et relations pour l'algèbre d'entrelacement A_3 de la représentation de Gelfand-Graev de $GL(3, F)$, mais n'introduit pas de transformation de Mellin dans la suite. Il utilise la table des caractères de $GL(3, F)$ pour déterminer les homomorphismes d'algèbres de A_3 dans $\mathbf{C}$.

Les relations sont vérifiées avec beaucoup de calculs, derrière lesquels se cachent sans doute des identités.

Une méthode différente a été appliquée au cas de $GL(3, F)$ dans ma publication [6] qui ne concerne que le cas de la série discrète. Une transformation de Mellin a été utilisée dans une situation différente, ce qui fait apparaître des identités de sommes de Gauss « du type de Barnes » pour la dimension trois. Ces identités devraient implicitement être contenues dans la partie des calculs de Chang concernant la série discrète.

Comme en témoignent plus en détail les introductions de [4], [5] et [6], une grande partie des idées sous-jacentes à ce travail est due à P. Cartier.