3.4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2 SOUS LA CONDITION (R)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

3.4. Démonstration du théorème 1.2 sous la condition (R)

Dans ce paragraphe, l'espace est $\mathbf{R}^n$, n entier quelconque.

Commençons par expliciter les hypothèses du théorème 1.2 sous la condition (R); le problème étant non caractéristique, nous pouvons choisir (lemme 1.3) des coordonnées locales (y, t) telles que:

1. $x_0 = (0, 0)$,
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$,
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ à un facteur non nul près.

L'intersection de l'ouvert ω avec le domaine dans lequel la propriété (R) est vérifiée contient un voisinage de $(0, 0)$ de la forme $v \times \,]-T, T[$ où $T > 0$ et v est un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^{n-1}$ suffisamment petit pour que $\operatorname{rg} \mathscr{L} \leqslant 2$ sur $S = \{(y, 0) \in \mathbf{R}^n \mid y \in v\}$. On a $\operatorname{rg} \mathscr{L} \geqslant 1$ sur S puisque $\partial_t \in \mathscr{L}$, ce qui entraîne encore que:

1. Pour un point $(y_0, 0) \in S$ tel que $\operatorname{rg} \mathscr{L}(y_0, 0) = 1$, la variété intégrale passant par $(y_0, 0)$ est $\{y_0\} \times \,]-T, T[$.
2. Pour un point $(y_0, 0) \in S$ tel que $\operatorname{rg} \mathscr{L}(y_0, 0) = 2$, si la courbe $\gamma \subset S$ est la trace sur S de la variété intégrale passant par $(y_0, 0)$, cette dernière est $\gamma \times \,]-T, T[$.

Comme la réunion des traces sur S des variétés intégrales de $\mathscr{L}$ est égale à S par la propriété (R), la réunion des variétés intégrales de $\mathscr{L}$ coupant S est égale au voisinage $v \times \,]-T, T[$ tout entier.

Soit $u \in C^1(\omega)$ une solution du problème (1.2), et supposons qu'il existe un point $(y_0, t_0) \in v \times \,]0, T[$ tel que $u(y_0, t_0) \neq 0$. Ce point (y_0, t_0) est donc situé sur une variété intégrale de $\mathscr{L}$ coupant S. Si (y_0, t_0) est sur une variété intégrale de dimension 1, c'est que $b(y_0, t) = 0$ pour tout $t \in \,]-T, T[$, et u vérifie donc l'équation

$$\partial_t u(y_0, t) + c(y_0, t)\, u(y_0, t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \in \,]-T, T[$$

où y_0 n'est plus qu'un paramètre; la théorie des équations différentielles ordinaires nous permet de conclure que $u(y_0, t) = 0$ pour $t \in \,]0, T[$, ce qui contredit le fait que $u(y_0, t_0) \neq 0$.

Il s'ensuit donc que (y_0, t_0) est sur une variété intégrale de $\mathscr{L}$ de dimension 2 que nous noterons $\mathscr{V}$. Utilisons (z, t) comme coordonnées sur $\mathscr{V}$ où z est l'abscisse curviligne sur $\mathscr{V} \cap S$, et désignons par z_0 l'abscisse du point (y_0, t_0) dans les coordonnées (z, t). Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon] \times \,]-T, T[$ soit contenu dans $\mathscr{V}$. Comme dans la démonstration du théorème 3.4, nous posons $\psi(z, t) = t + t_0(z - z_0)^2 \varepsilon^{-2}$ et introduisons les paraboles P_τ d'équations $\psi(z, t) = \tau$. Nous obtenons ainsi un point (z_1, t_1) du support de la trace de u sur $\mathscr{V}$ tel que $u = 0$ dans $\{(z, t) \in \mathscr{V} \mid \psi(z, t) \leqslant \psi(z_1, t_1)\}$. Or le problème (pour ψ) est non caractéristique en (z_1, t_1) et $\operatorname{rg} \mathscr{L}(z_1, t_1) = 2$ puisque nous sommes sur une variété intégrale de $\mathscr{L}$ de dimension 2. Nous pouvons donc appliquer le théorème 3.4 pour conclure que u est nulle au voisinage de (z_1, t_1) sur $\mathscr{V}$, ce qui contredit le fait que (z_1, t_1) est un point du support de la trace de u sur $\mathscr{V}$.

Nous avons donc obtenu que $u = 0$ dans $v \times]-T, T[$.

3.5. Démonstration du théorème 1.2 sous la condition (P)

Comme le problème est non caractéristique, nous pouvons faire usage du lemme 1.3 pour trouver des coordonnées locales $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$, un voisinage v de 0 dans $\mathbf{R}^{n-1}$ et un nombre $T > 0$ tels que

1. $x_0 = (0, 0)$,
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$,
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ dans $v \times]-T, T[$ à un facteur non nul près,
4. $v \times]-T, T[\subset \omega \cap \Omega$.

Soit $u \in C^1(\omega)$ une solution du problème (1.2) et supposons qu'il existe $(y_0, t_0) \in v \times]0, T[$ tel que $u(y_0, t_0) \neq 0$. Si on avait $b(y_0, t) = 0$ pour tout $t \in]0, t_0[$, l'équation se réduirait à une équation différentielle ordinaire, ce qui conduirait à une contradiction.

Il existe donc $t_1 \in]0, t_0[$ tel que $b(y_0, t_1) \neq 0$. Il existe aussi tout un voisinage de y_0 tel que $b(y, t_1) \neq 0$ pour y dans ce voisinage, par continuité, et le vecteur

$$d(y) = b(y, t_1) / | b(y, t_1) |$$

est bien défini et régulier au voisinage de y_0; par conséquent, le champ réel $d(y) \cdot \partial_y$ admet en y_0 une courbe intégrale que nous noterons γ.

Comme la condition (P) est vérifiée dans $v \times]0, T[$, nous avons $b(y, t) = | b(y, t) | d(y)$ pour tout $(y, t) \in \gamma \times]0, T[$, et donc le champ L est tangent à $\gamma \times]0, T[$; nous pouvons désormais nous restreindre à $\gamma \times]-T, T[$ qui contient le point (y_0, t_0) où u ne s'annule pas et sur lequel nous prenons comme coordonnées le couple (z, t) où z est l'abscisse curviligne sur γ associée au champ $d(y) \cdot \partial_y$; z_0 désignera l'abscisse du point (y_0, t_0).