3.1. Le problème elliptique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Pour démontrer le théorème 1.2, nous suivrons le schéma proposé par Strauss et Trèves [24] sauf au paragraphe 3.2 où nous nous inspirons de Zuily [28]. Il faut dans la démonstration distinguer les étapes suivantes: tout d'abord une étape purement locale où nous établissons un lemme technique copié sur le cas elliptique (3.2); puis nous effectuons par deux fois un passage du local au global afin d'obtenir le théorème 1.2 sous la condition (R) d'abord dans $\mathbf{R}^2$ (3.3), puis dans $\mathbf{R}^n$ (3.4); enfin, c'est de nouveau en « globalisant » le résultat donné par le lemme du paragraphe 3.2 que nous obtenons le théorème 1.2 sous la condition (P) (3.5).

3.1. Le problème elliptique

Un champ L de $\mathbf{R}^2$ est dit elliptique en x_0 si les champs réels $X = \operatorname{Re} L$ et $Y = \operatorname{Im} L$ sont linéairement indépendants en x_0. Pour toute fonction φ telle que $d\varphi(x_0) \neq 0$, le problème associé à un champ elliptique est non caractéristique. Le champ L sera dit elliptique dans un ouvert Ω de $\mathbf{R}^2$ s'il est elliptique en chacun de ses points.

Théorème 3.1. *Soit L un champ elliptique en un point $x_0 \in \mathbf{R}^2$. Alors, pour tout voisinage ω de x_0 et toute $u \in C^1(\omega)$ solution du système*

$$(3.1) \qquad \begin{cases} (L+c_0)u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega \quad \textit{et} \\ u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}, \end{cases}$$

la fonction u s'annule au voisinage de x_0.

Démonstration. Posons

$$\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0) + |x - x_0|^2 \quad \text{et} \quad \Psi(x) = -\big(\psi(x) - \varepsilon_0\big)^2$$

pour un $\varepsilon_0 > 0$ que nous choisirons ultérieurement. Remarquons que pour tout $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $K_\varepsilon = \{x \in \omega_+ \mid \psi(x) \leqslant \varepsilon\}$ est un compact tel que x_0 soit un point intérieur de $K_\varepsilon \cup \omega_-$.

Le point clé de la démonstration, que nous établirons plus loin, est l'obtention de l'inégalité suivante (dite inégalité de Carleman): il existe des constantes $\tau_0 < \infty$ et $C < \infty$, et un opérateur R (du premier ordre) tels que $\forall v \in C^1(\mathbf{R}^2)$ avec $\operatorname{supp} v \subset K_{\varepsilon_0}$, $\forall \tau \geqslant \tau_0$,

$$(3.2) \qquad \int e^{-2\tau\Psi} |v|^2 \leqslant C \int e^{-2\tau\Psi} |(L+c_0)v| \, (|Rv| + |v|).$$

Montrons pour le moment comment obtenir l'unicité à partir d'une telle inégalité. Des valeurs ε_1 et ε_2 étant fixées de telle manière que $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$, nous choisissons une fonction de troncature $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ telle que $\chi = 1$ sur K_{ε_1} et $\operatorname{supp} \chi \cap \omega_+ \subset K_{\varepsilon_0}$:

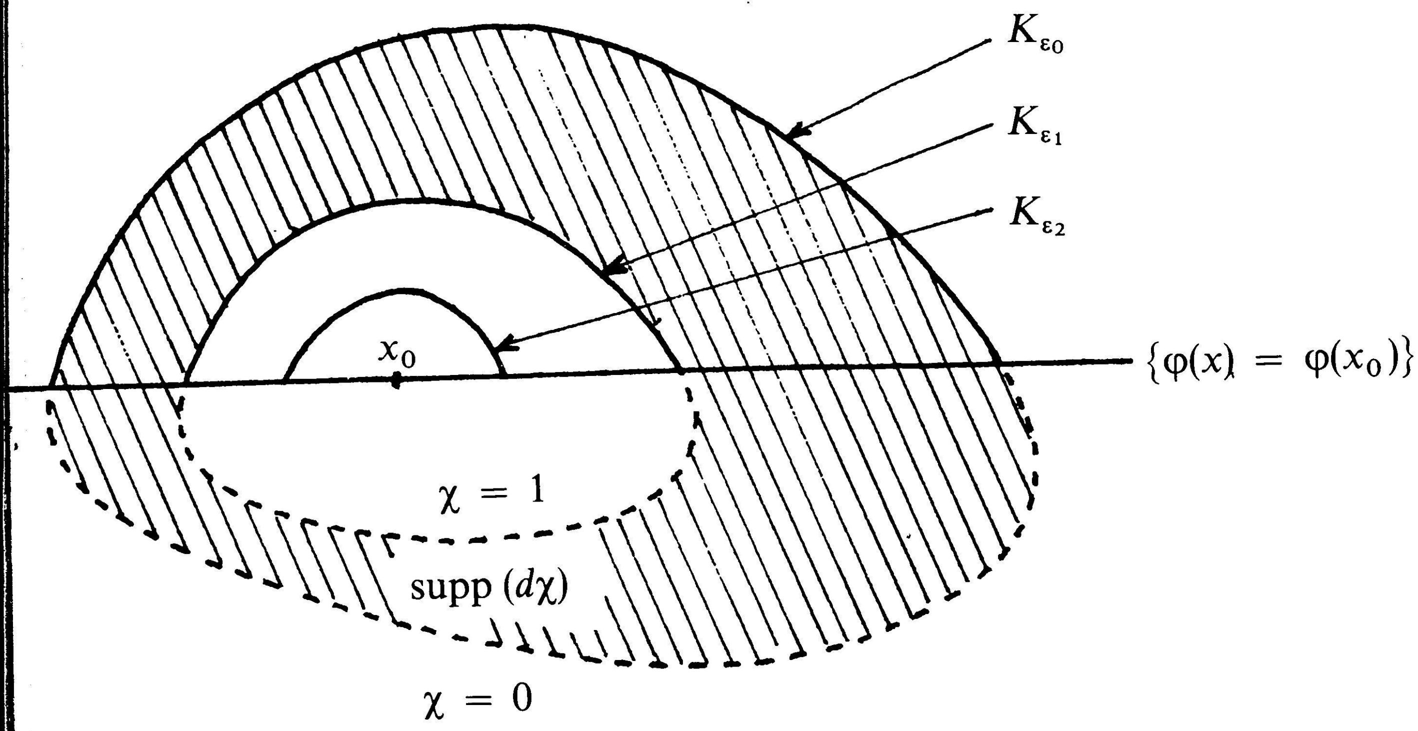

FIGURE 3.1.
Le support de χ et les compacts K_{ε_0}, K_{ε_1} et K_{ε_2}.

Soit u une solution du système (3.1); formons $v = \chi u$ le produit de u par χ: $v \in C^1(\mathbf{R}^2)$ et $\operatorname{supp} v \subset K_{\varepsilon_0}$, donc on peut appliquer l'inégalité (3.2) à v. Mais d'une part

$$e^{2\tau(\varepsilon_2-\varepsilon_0)^2}\int_{K_{\varepsilon_2}} |u|^2 \leqslant \int_{K_{\varepsilon_2}} e^{-2\tau\Psi}|u|^2$$
$$= \int_{K_{\varepsilon_2}} e^{-2\tau\Psi}|v|^2 \leqslant \int_{K_{\varepsilon_0}} e^{-2\tau\Psi}|v|^2,$$

et d'autre part, $(L+c_0)v = \chi(L+c_0)u + [L,\chi]u = (L\chi)u = 0$ sur K_{ε_1}, d'où

$$\int_{K_{\varepsilon_0}} e^{-2\tau\Psi}|(L+c_0)v|(|Rv|+|v|) = \int_{K_{\varepsilon_0}\setminus K_{\varepsilon_1}} e^{-2\tau\Psi}|(L+c_0)v|(|Rv|+|v|)$$
$$\leqslant e^{2\tau(\varepsilon_1-\varepsilon_0)^2}\int_{K_{\varepsilon_0}} |(L+c_0)v|(|Rv|+|v|).$$

L'inégalité (3.2) donne donc pour $\tau \geqslant \tau_0$,

$$\int_{K_{\varepsilon_2}} |u|^2 \leqslant C e^{2\tau(\varepsilon_2-\varepsilon_1)(2\varepsilon_0-\varepsilon_1-\varepsilon_2)} \int_{K_{\varepsilon_0}} |(L+c_0)v|\,(|Rv|+|v|)\,,$$

et comme $(\varepsilon_2-\varepsilon_1)(2\varepsilon_0-\varepsilon_1-\varepsilon_2) < 0$, il suffit de laisser τ tendre vers l'infini pour savoir que $u = 0$ dans K_{ε_2} donc au voisinage de x_0.

Démonstration de l'inégalité (3.2). Comme $d\psi(x_0) = d\varphi(x_0) \neq 0$ et que L est elliptique en x_0, le problème (avec ψ) est non caractéristique et nous pouvons d'après le lemme 1.3 trouver des coordonnées $(y, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ telles que

1. $x_0 = (0, 0)$,
2. $\psi(x) = t$,
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t)\,\partial_y + c(y, t)$ à un facteur non nul près.

Comme L est elliptique en x_0, nous supposerons que $b(0, 0) > 0$ (sinon, changer y en $-y$), et prendrons ε_0 suffisamment petit pour que $b \geqslant \delta > 0$ dans K_{ε_0}.

En vue d'écrire $w = e^{-\tau\Psi}v$, posons $L_\tau = e^{-\tau\Psi}(L+c_0)e^{\tau\Psi}$, et $c = c_1 + ic_2$ où c_1 et c_2 sont à valeurs réelles; d'après les points 2 et 3 ci-dessus, on calcule que:

$$L_\tau = \partial_t - 2\tau(t-\varepsilon_0) + ib\,\partial_y + c_1 + ic_2 = M + iN \qquad \text{où}$$

$$\begin{cases} M = \partial_t + ic_2 \\ N = b\,\partial_y + i\big(2\tau(t-\varepsilon_0)-c_1\big). \end{cases}$$

Dans le découpage ci-dessus, nous avons séparé la partie autoadjointe de la partie anti-autoadjointe pour pouvoir effectuer des intégrations par parties. En effet, pour $w \in C^1(\mathbf{R}^2)$ avec supp $w \subset K_{\varepsilon_0}$,

$$\operatorname{Re}\int \frac{1}{ib} L_\tau w\overline{Nw} = \operatorname{Re}\int \frac{1}{ib} Mw\overline{Nw} + \int \frac{|Nw|^2}{b} \geqslant \operatorname{Re}\int \frac{1}{ib} Mw\overline{Nw}$$

puisque $b > 0$ dans K_{ε_0}; puis

$$2\operatorname{Re}\int Mw(\overline{Nw}/ib) = \int |w|^2\partial_t[(2\tau(t-\varepsilon_0)-c_1)/b] - \int |w|^2\partial_y c_2$$

par intégrations par parties. On obtient donc:

$$\int |w|^2(2\tau[(b-(t-\varepsilon_0)\partial_t b)/b^2] - [\partial_y c_2 + \partial_t(c_1/b)])$$
$$\leqslant 2\,\mathrm{Re} \int \frac{1}{ib} L_\tau w \overline{Nw} \leqslant 2 \int |L_\tau w|\,|Nw/b|\,.$$

Choisissons donc ε_0 assez petit pour que $|(t-\varepsilon_0)\partial_t b| \leqslant \delta/2$ dans K_{ε_0}, puis τ_0 suffisamment grand pour que $|\partial_y c_2 + \partial_t(c_1/b)| \leqslant \delta\tau_0/(2 \sup_{K_{\varepsilon_0}} b^2)$ dans K_{ε_0}; alors, pour $\tau \geqslant \tau_0$ et $C_0 = 4 \sup b^2/\delta$,

$$\frac{\tau}{C_0} \int |w|^2 \leqslant \int |L_\tau w|\,|Nw/b|\,.$$

Enfin, pour $v \in C^1(\mathbf{R}^2)$ avec $\operatorname{supp} v \subset K_{\varepsilon_0}$, posons $w = e^{-\tau\Psi}v$, et reportons cette expression dans l'inégalité précédente; on obtient:

$$\int e^{-2\tau\Psi}|v|^2 \leqslant \frac{C_0}{\tau} \int e^{-2\tau\Psi}|(L+c_0)v|\,|(\partial_y - ic_1/b)v|$$
$$+ C_0 \int e^{-2\tau\Psi}|(L+c_0)v|\,|2(t-\varepsilon_0)v/b|$$

d'où l'inégalité (3.2) si nous posons

$$R = \partial_y - ic_1/b \quad \text{et} \quad C = \max\{C_0/\tau_0, C_0 \sup|2(t-\varepsilon_0)/b|\}\,.$$

Remarques. Il existe pour les champs elliptiques des inégalités de Carleman meilleures que l'inégalité (3.2); nous avons fait ce choix parce que ce résultat s'étend à des champs non elliptiques comme nous le verrons plus loin. L'introduction du facteur $1/b$ dans les intégrales a pour but de remplacer $\int b\partial_t w \partial_y \bar{w}$ qui nécessite des calculs pour être estimée, par $\int \partial_t w \partial_y \bar{w}$ dont la partie imaginaire est nulle; c'est là que nous utilisons l'ellipticité de L. Dans le prochain paragraphe, nous allons montrer qu'un tel calcul est encore possible sous des hypothèses plus faibles sur L. Avant cela, donnons un corollaire du théorème 3.1.

COROLLAIRE 3.2. *Soit* Ω *un ouvert connexe de* $\mathbf{R}^2$ *dans lequel le champ* L *est elliptique. Si* $u \in C^1(\Omega)$ *vérifie* $(L+c_0)u(x) = 0$ *dans* Ω *et s'annule dans un ouvert non vide* $\omega \subset \Omega$, *alors* u *est nulle dans* Ω.

Démonstration. Notons $F = \operatorname{supp} u$ et supposons que $F \neq \mathring{F}$.

Alors il existe $x_0 \in F \backslash \mathring{F}$. Comme $x_0 \in \Omega$, il existe une boule ouverte centrée en x_0, $B(x_0, \delta)$, qui soit contenue dans Ω. Comme $x_0 \notin \mathring{F}$, il existe un point $x_1 \in B(x_0, \delta/2)$ tel que $x_1 \notin F$. Soit alors $\varepsilon = \sup\{r \mid B(x_1, r) \cap F = \emptyset\}$; on a $0 < \varepsilon \leqslant \delta/2$ puisque F est fermé et que $x_0 \in F$, donc $B(x_1, \varepsilon) \subset B(x_0, \delta) \subset \Omega$. De plus, par compacité il existe $x_2 \in F \cap \overline{B(x_1, \varepsilon)}$.

Soit $\varphi(x) = |x - x_1|^2$; alors u est nulle dans $\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \leqslant \varepsilon^2\} = \overline{B(x_1, \varepsilon)}$ puisque $B(x_1, \varepsilon) \cap F = \emptyset$ par définition de ε; or le problème est elliptique en x_2 et $d\varphi(x_2) = 2(x_2 - x_1) \neq 0$, donc par le théorème 3.1, $u = 0$ au voisinage de x_2, ce qui contredit le fait que $x_2 \in F = \operatorname{supp} u$.

Cette contradiction prouve que le support de u est à la fois ouvert et fermé. Mais $\operatorname{supp} u \neq \Omega$ puisque $\omega \neq \emptyset$ est contenu dans le complémentaire de ce support. Comme Ω est connexe, c'est que $\operatorname{supp} u = \emptyset$.

3.2. Un lemme technique

Pour préparer la démonstration du théorème 1.2, nous donnons maintenant un résultat d'unicité dans $\mathbf{R}^2$ copié sur le résultat précédent, mais sous des hypothèses plus faibles.

Lemme 3.3. *Soient* $\theta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *et* $b : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *deux fonctions* C^∞. *Supposons qu'il existe un voisinage convexe* ω *de* $(y_0, \theta(y_0))$ *tel que* b *soit positive sur* $\omega_+ = \{(y, t) \in \omega \mid t \geqslant \theta(y)\}$ *et* $b(y_0, t_0) > 0$ *pour un* t_0 *tel que* $(y_0, t_0) \in \omega_+$. *Alors pour toute* $u \in C^1(\omega)$ *solution du système*

$$\text{(3.3)} \qquad \begin{cases} \partial_t u + ib\, \partial_y u + cu = 0 & \text{dans } \omega, \text{ et} \\ u = 0 \quad \text{dans } \omega_- = \{(y, t) \in \omega \mid t \leqslant \theta(y)\} \end{cases}$$

la fonction u *s'annule au voisinage de* $(y_0, \theta(y_0))$.

Démonstration. Elle sera très semblable à celle du théorème 3.1. Pour commencer, nous allons choisir un poids ψ fabriqué de telle manière que l'opérateur $n = N/b$ soit encore bien défini.

Si $b(y_0, \theta(y_0)) > 0$, nous sommes dans le cas elliptique, et le résultat découle du théorème 3.1; nous supposerons donc tout au long de cette démonstration que $b(y_0, \theta(y_0)) = 0$. Le t_0 de l'hypothèse vérifie donc $t_0 > \theta(y_0)$, et il existe un voisinage de (y_0, t_0) contenu dans ω_+ tel que $b \geqslant \delta > 0$ dans ce voisinage (et nous supposerons $\delta \leqslant 1$ dans la suite); nous pouvons même choisir ce voisinage de la forme