

# 3. Tail wagging

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

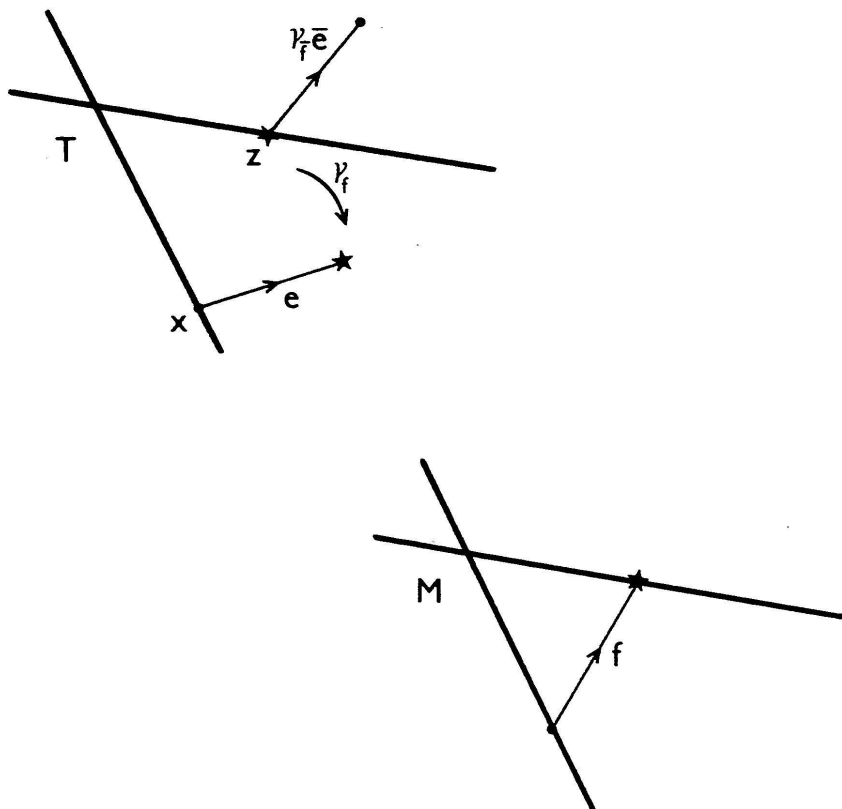


FIGURE 1

### 3. TAIL WAGGING

With the notation established above let  $*G_w$  denote the free product of the stabilizers of the vertices of  $T$ , and  $F$  the free group generated by symbols  $\lambda_f$ , one for each edge  $f$  of  $X/G$ . Let  $R$  be the normal consequence in  $(*G_w)*F$  of the words

$$\begin{aligned} \lambda_f & \quad (f \text{ an edge of } M), \\ \lambda_{\bar{f}} \lambda_f & \quad \text{and} \\ \lambda_{\bar{f}} g_x \lambda_f (\gamma_{\bar{f}} g \gamma_f)_z^{-1} \end{aligned}$$

We shall produce an isomorphism

$$\psi: G \rightarrow [(*G_w)*F]/R.$$

Choose a vertex  $v$  of  $T$  as base point. If  $g \in G$  fixes  $v$  set

$$\psi(g) = g_v R$$

where as usual  $g_v$  is the element  $g$  interpreted as a member of  $G_v$ . If  $g$  moves  $v$  then it sends it outside  $T$  because no two vertices of  $T$  lie in the same orbit. Let  $e_1 e_2 \dots e_n$  be the geodesic which joins  $v$  to  $gv$  and suppose  $e_m$  is the first edge that is *not* in  $T$ . The path  $e_m e_{m+1} \dots e_n$  will be called the *tail* of  $\overrightarrow{v gv}$ . Let  $x_1$  be the initial vertex of  $e_m$ . Project  $e_m$  into  $X/G$  to give an edge  $f_1$ . The canonical lift  $e^1$  of  $f_1$  into  $X$  has its initial vertex in  $T$ , so  $i(e^1) = x_1$ . Choose an element  $a_{x_1} \in G_{x_1}$  which sends  $e^1$  to  $e_m$ . Let

$$e_k^1 = (\gamma_{f_1} a_{x_1}^{-1}) e_k$$

for  $m+1 \leq k \leq n$ , and replace  $e_1 e_2 \dots e_n$  by the new path  $e_{m+1}^1 e_{m+2}^1 \dots e_n^1$ . We call this process *tail wagging*. Our new path begins at

$$z_1 = t(\gamma_{f_1} e^1) = i(e_{m+1}^1)$$

which is a vertex of  $T$  and ends at  $(\gamma_{f_1} a_{x_1}^{-1} g)v$ , see Figure 2. We walk along it to the first point  $x_2$  where it quits  $T$  and repeat the above

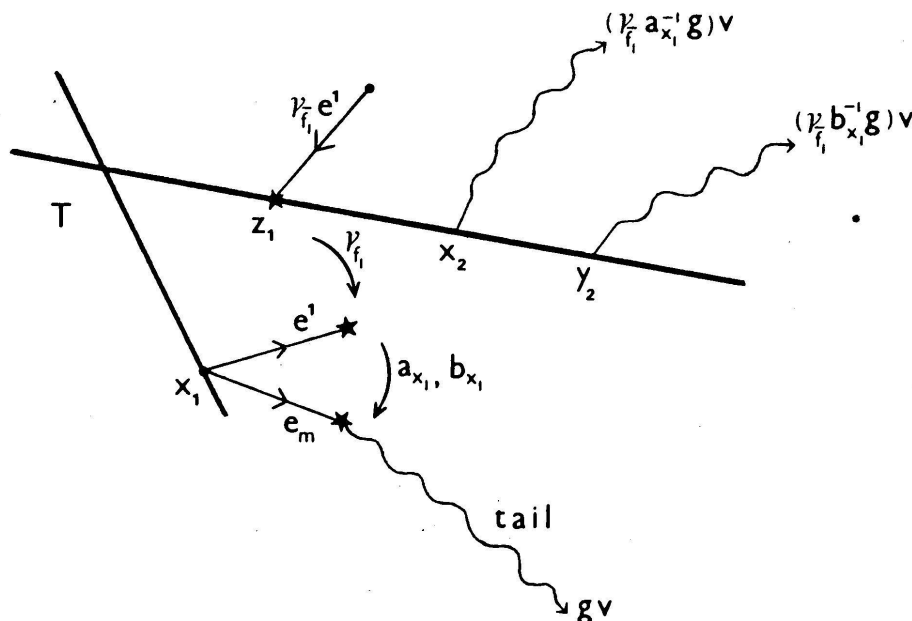


FIGURE 2

procedure. Since we shorten the tail at each step we eventually obtain a path which lies entirely in  $T$  and ends at say

$$(\gamma_{f_r} a_{x_r}^{-1} \dots \gamma_{f_2} a_{x_2}^{-1} \gamma_{f_1} a_{x_1}^{-1} g)v.$$

Then  $\gamma_{f_r} a_{x_r}^{-1} \dots \gamma_{f_1} a_{x_1}^{-1} g$  must fix  $v$ , say  $\gamma_{f_r} a_{x_r}^{-1} \dots \gamma_{f_1} a_{x_1}^{-1} g = a_v \in G_v$ .

We now have

$$g = a_{x_1} \gamma_{f_1} \dots a_{x_r} \gamma_{f_r} a_v$$

and we somewhat optimistically define

$$\psi(g) = a_{x_1} \lambda_{f_1} \dots a_{x_r} \lambda_{f_r} a_v R.$$

#### 4. AN INEFFICIENT CHOICE

Is  $\psi$  well defined? The geodesic from  $v$  to  $gv$  is certainly unique, as is the first point  $x_1$  where it leaves  $T$  and its first edge  $e_m$  outside  $T$ . Both the edge  $e^1$  and the group element  $\gamma_{f_1}$  are now determined by our original construction. The only ambiguity at this stage is the choice of the element  $a_{x_1} \in G_{x_1}$  which maps  $e^1$  to  $e_m$ . A different choice  $b_{x_1}$  will give a path from  $z_1$  to  $(\gamma_{f_1} b_{x_1}^{-1} g)v$  which leaves  $T$  for the first time at say  $y_2$ . The first edge outside  $T$  will project to an edge  $f'_2$  of  $X/G$  and so on until eventually we have  $g$  expressed as

$$g = b_{x_1} \gamma_{f_1} b_{y_2} \gamma_{f'_2} \dots b_{y_s} \gamma_{f'_s} b_v.$$

We must show that  $a_{x_1} \lambda_{f_1} a_{x_2} \lambda_{f_2} \dots a_{x_r} \lambda_{f_r} a_v$  and  $b_{x_1} \lambda_{f_1} b_{y_2} \lambda_{f'_2} \dots b_{y_s} \lambda_{f'_s} b_v$  determine the same left coset of  $R$  in  $(*G_w)*F$ .

Agree to select  $a_{x_1}$  from  $G_{x_1}$  so that the tail of the resulting path is as long as possible. Continue in this way selecting  $a_{x_2}, a_{x_3} \dots$  so as to maximise the length of the tail at each stage. We shall compare any other set of choices with this rather inefficient selection.

Both  $a_{x_1}$  and  $b_{x_1}$  map  $e^1$  to  $e_m$ , so  $c = a_{x_1}^{-1} b_{x_1}$  must fix  $e^1$ . Also, due to our particular selection of  $a_{x_1}$ , the geodesic from  $z_1$  to  $x_2$  is left fixed by  $\gamma_{f_1} c \gamma_{f_1}$ . Therefore