

5. CONCLUDING REMARKS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$n = 4^a 9^b, \quad n' = 2 \cdot 4^c 9^d (a, b, c, d \in \mathbf{N}),$$

for which

$$\lambda(n) = 1, \quad \lambda(n') = -1.$$

We therefore have obtained the desired contradiction under the assumption that there exist four consecutive integers $n \geq 2N_0$, for which $\lambda(n) = 1$. By the part of the theorem already proved, there exist at least three such integers. Therefore (5) holds for some $m_0 > 2N_0$ with $n_0 = m_0 + 2$, and we may now assume that

$$\lambda(m_0 - 1) = \lambda(m_0 + 3) = -1.$$

If m_0 is odd, then this implies

$$\lambda\left(\frac{m_0 - 1}{2}\right) = \lambda\left(\frac{m_0 + 3}{2}\right) = 1, \quad \lambda\left(\frac{m_0 + 1}{2}\right) = -1,$$

so that $(m_0 + 1)/2 > N_0$ is good, in contradiction to our assumption. But if m_0 is even, then defining m_1 and n_1 by (7), (6) holds for $i = 1$, and we have

$$m_1 \geq 2N_0, \quad n_1 - m_1 = \frac{3(m_0 + 2)}{2} - \frac{3m_0}{2} = 3.$$

Thus we are back in the case already treated.

By contradiction, we therefore conclude that (1) has infinitely many solutions for $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (1, -1, 1)$, and the proof of the theorem is complete.

5. CONCLUDING REMARKS

In the foregoing proof, the relevant property of the Liouville function was that $\lambda(n)$ is completely multiplicative and assumes only the values ± 1 . Besides this, we used only the fact that $\lambda(2) = \lambda(3) = \lambda(5) = -1$ and (in the proof of the lemma)

$$\lambda(14) = \lambda(16) = 1, \quad \lambda(29) = \lambda(31) = -1.$$

The proof, as it stands, works for any completely multiplicative function $f(n) = \pm 1$ with these properties. By suitably modifying the proof, it is possible to cover other classes of multiplicative functions as well.

It would be interesting to determine those completely multiplicative functions $f(n) = \pm 1$, for which the analogue of the theorem does not hold. Schur [3] proved that if $f \neq f_{\pm}$, where

$$f_{\pm}(n) = \begin{cases} (\pm 1)^k & \text{if } n = 3^k m, m \equiv 1 \pmod{3}, \\ -(\pm 1)^k & \text{if } n = 3^k m, m \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases}$$

then there exists at least one $n \geq 1$, such that

$$f(n) = f(n+1) = f(n+2) = 1.$$

It is likely that under the same hypotheses there are infinitely many such n . Using arguments similar to those in section 3, one can prove this assertion under the additional hypotheses $f(2) = 1$ and $f(3) = -1$, but the general case seems to be more complicated.

A very plausible conjecture is that the integers n , for which (1) holds, have positive density. In the case $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$, this would follow from an analogous strengthening of the lemma by requiring (2) to hold on a set of positive density. Whereas a very simple argument shows that the equations $\lambda(n) = \lambda(n+1)$ and $\lambda(n+1) = \lambda(n-1)$ hold on a set of positive (lower) density (cf. [2]), this argument seems to break down, if n is required to lie in a prescribed residue class, and so far we have not been able to overcome this difficulty.

REFERENCES

- [1] CHOWLA, S. *The Riemann hypothesis and Hilbert's tenth problem*. New York-London-Paris, Gordon and Breach 1965.
- [2] GRAHAM, S. and D. HENSLEY. Problem E 3025. *Am. Math. Monthly* 90 (1983), 707.
- [3] SCHUR, I. Multiplikativ signierte Folgen positiver ganzer Zahlen. In: *Gesammelte Abhandlungen von Issai Schur, Vol. 3*, 392-399. Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1973.

(Reçu le 21 octobre 1985)

Adolf Hildebrand

Department of Mathematics
University of Illinois
1409 West Green Street
Urbana, Illinois 61801
U.S.A.