

## 2. Rigid motions

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

use a method which is more in the spirit of Minkowski's geometry of numbers, from where Bieberbach's original arguments departed.

Since the material is standard, the exposition will be condensed. Yet some efforts have been made not to frustrate the reader by omitting details.

I would like to express my thanks to Leon Charlap, Bernhard Ruh, Han Sah and Klaus Dieter Semmler for many stimulating conversations.

## 2. RIGID MOTIONS

In this section we fix the notation and collect the necessary (and hopefully sufficient) rudiments from Linear Algebra.

We consider  $\mathbf{R}^n$  as an euclidean vector space with the standard inner product. We use  $|x|$  to denote the length of a vector  $x \in \mathbf{R}^n$ , and  $\sphericalangle(x, y) \in [0, \pi]$  to denote the angle between two vectors. A rigid motion  $\alpha$  (isometry of  $\mathbf{R}^n$ ) will be expressed in the form

$$x \mapsto \alpha x = Ax + a \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

where  $A = \text{rot } \alpha \in O(n)$  is an orthogonal map, called the *rotation part* of  $\alpha$ , and  $\alpha = \text{trans } \alpha \in \mathbf{R}^n$  is a vector, called the *translation part*.

2.1. *The commutator*  $[\alpha, \beta]$  of two rigid motions  $x \mapsto \alpha x = Ax + a$  and  $x \mapsto \beta x = Bx + b$  is defined as  $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ . The following formulae are easily checked:

$$\text{rot } [\alpha, \beta] = [A, B]$$

$$\text{trans } [\alpha, \beta] = (A - id)b + (id - [A, B])b + A(id - B)A^{-1}a.$$

2.2. *Rotations.* For  $A \in O(n)$  we define

$$m(A) = \max \{ |Ax - x| / |x| \mid x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \}.$$

Note that  $|Ax - x| \leq m(A)|x|$  for  $x \in \mathbf{R}^n$ . The set

$$(i) \quad E_A = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid |Ax - x| = m(A)|x| \}$$

is a non trivial  $A$ -invariant subspace. This is immediately checked except perhaps for the part " $x, y \in E_A$  implies  $x \pm y \in E_A$ ". This part follows from the equation

$$2m^2(A)(|x|^2 + |y|^2) = 2(|Ax - x|^2 + |Ay - y|^2) = |A(x+y) - (x+y)|^2 + |A(x-y) - (x-y)|^2 \leq m^2(A)(|x+y|^2 + |x-y|^2) = 2m^2(A)(|x|^2 + |y|^2)$$

Since  $A$  is an orthogonal map, the orthogonal complement  $E_A^\perp$  of  $E_A$  is also an  $A$ -invariant linear subspace of  $\mathbf{R}^n$ . We define

$$(ii) \quad m^\perp(A) = \max \{ |Ax - x| / |x| \mid x \in E_A^\perp \setminus \{0\} \}$$

if  $E_A^\perp \neq \{0\}$  and set  $m^\perp(A) = 0$  if  $E_A^\perp = \{0\}$ . It follows that

$$(iii) \quad m^\perp(A) < m(A) \text{ if } A \neq id.$$

We let  $x = x^E + x^\perp$ ,  $x^E \in E_A$ ,  $x^\perp \in E_A^\perp$  be the orthogonal decomposition of a vector  $x$  with respect to  $E_A$  and  $E_A^\perp$ . The simple observation

$$(iv) \quad |Ax^E - x^E| = m(A) |x^E|, \quad |Ax^\perp - x^\perp| \leq m^\perp(A) |x^\perp|$$

together with (iii), will play a crucial role in the proof of Theorem I.

2.3. *Commutator estimate.* For  $A, B \in O(n)$  we have

$$m([A, B]) \leq 2m(A) m(B).$$

*Proof.* Verify the identity

$$[A, B] - id = ((A - id)(B - id) - (B - id)(A - id))A^{-1}B^{-1}$$

From  $|A^{-1}B^{-1}x| = |x|$  it then follows that

$$|[A, B]x - x| \leq m(A) m(B) |x| + m(B) m(A) |x|$$

for all  $x \in \mathbf{R}^n$ .

2.4. *Crystallographic groups.* Discreteness and compactness of the fundamental domain will be used as follows:

A group  $G$  of rigid motions in  $\mathbf{R}^n$  is called crystallographic if

- (i) for all  $t > 0$  only finitely many  $\alpha \in G$  have  $|a| \leq t$ ,
- (ii) there is some constant  $d$  such that for each  $x \in \mathbf{R}^n$  there is an element  $\alpha \in G$  satisfying  $|a - x| \leq d$ .

### 3. PROOF OF THEOREM I

Now let  $G$  be an  $n$ -dimensional crystallographic group.

3.1. LEMMA A ("Mini Bieberbach"). For each unit vector  $u \in \mathbf{R}^n$  and for all  $\varepsilon, \delta > 0$  there exists  $\beta \in G$  satisfying