

2. La formule intégrale de Hecke

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

2. LA FORMULE INTÉGRALE DE HECKE

On suppose toujours que E un corps de nombres sur \mathbf{Q} . En choisissant pour g la matrice identité, la formule adélique donnée dans le théorème 1 du chapitre précédent devient

$$\int_{T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})} E(\varphi, x, \omega) d\mu_{Z\backslash T}(x) = \zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}).$$

On définit le quasi-caractère ω de $\mathbf{A}^\times/\mathbf{Q}^\times$ de la manière suivante:

$$\omega(t) = |t|_{\mathbf{A}}^s, \quad t \in \mathbf{A}^\times,$$

avec $s \in \mathbf{C}$ et $\sigma = \text{Res} > 1$.

Ainsi

$$\omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}(t) = |t|_{\mathbf{A}_E}^s, \quad t \in \mathbf{A}_E^\times.$$

On définit la fonction φ de $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}))$ par

$$\varphi = \prod \varphi_p$$

avec, pour les *places finies*,

$$\varphi_p(t_p) = \chi_{L_p}(t_p), \quad t_p \in E \otimes \mathbf{Q}_p,$$

où χ_{L_p} est la fonction caractéristique du réseau L_p engendré dans $E \otimes \mathbf{Q}_p$ par la base fondamentale $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ de E sur \mathbf{Q} .

On note μ_p comme au chapitre II, l'isomorphisme de $E \otimes \mathbf{Q}_p$ sur $\prod_{\ell|p} E$; le réseau L_p étant engendré par une base fondamentale, on a

$$\mu_p(L_p) = \prod_{\ell|p} r_\ell,$$

de sorte que

$$\varphi_p \circ \mu_p^{-1} = \prod_{\ell|p} \chi_{r_\ell}.$$

Pour la place *infinie*, on pose

$$\varphi_\infty(t) = e^{-\pi F(t)}, \quad t \in E \otimes \mathbf{R},$$

avec la fonction F définie par

$$F(t) = \sum_{i=1}^{r_1} \sigma_i(t)^2 + 2 \sum_{i=r_1+1}^{r_1+r_2} |\sigma_i(t)|^2,$$

où $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq r_1}$ désignent les r_1 plongements de E dans \mathbf{R} , $(\sigma_i)_{r_1+1 \leq i \leq r_1+r_2}$

les r_2 plongements de E dans \mathbf{C} non conjugués deux à deux et

$$\sigma_{r_1+r_2+i} = \overline{\sigma_{r_1+i}} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq r_2.$$

La fonction F peut également s'exprimer pour un élément $t = t_1\omega_1 + \dots + t_n\omega_n$ de $E \otimes \mathbf{R}$ de la manière suivante :

$$F(t_1\omega_1 + \dots + t_n\omega_n) = \sum_{i=1}^{r_1} (t_1\omega_1^{(i)} + \dots + t_n\omega_n^{(i)})^2 + 2 \sum_{i=r_1+1}^{r_1+r_2} |t_1\omega_1^{(i)} + \dots + t_n\omega_n^{(i)}|^2 = (t_1, \dots, t_n)\Delta \cdot {}^t\overline{\Delta} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix},$$

où on a noté $\omega_j^{(i)} = \sigma_i(\omega_j)$ et Δ la matrice

$$\begin{pmatrix} \omega_1^{(1)} & \dots & \omega_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_n^{(1)} & \dots & \omega_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Enfin, on note comme au chapitre V :

μ_E la mesure de Haar sur \mathbf{A}_E^\times obtenue en prenant $\mu_E = \prod \mu_\rho$ avec $\mu_\rho(r_\rho^\times) = 1$ pour toute place finie ρ de E , $d\mu_\rho(x) = \frac{dx}{|x|}$ pour les places réelles de E et $d\mu_\rho(x) = |x|^{-2} \cdot |dx \wedge d\bar{x}|$ pour les places complexes de E ,
 μ_T la mesure de Haar sur $T(\mathbf{A})$ et $T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A})$,
 μ la mesure de Haar sur \mathbf{A}^\times , $\mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{A}^\times$ et $Z(\mathbf{Q}) \backslash Z(\mathbf{A})$,
 $\mu_{Z \backslash T}$ la mesure de Haar sur $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A}) \backslash T(\mathbf{A})$.

A) Calcul de $\zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/\mathbf{Q}})$

Pour $\sigma > 1$, on a les égalités suivantes :

$$\zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}) = \int_{\mathbf{A}_E^\times} \varphi(t) \cdot |t|_{\mathbf{A}_E}^s d\mu_E(t) = \prod_\rho \int_{E_\rho^\times} \varphi_\rho |t_\rho| \cdot |t_\rho|^s d\mu_\rho(t_\rho)$$

(cf. [6], Prop. 10, p. 119).

Alors en utilisant [6], Prop. 11, p. 120 et lemme 8, p. 127, on obtien

$$\zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}) = \pi^{-r_1 s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} (2\pi)^{r_2(1-2)} \Gamma(s)^{r_2} \cdot \prod_{\rho \text{ fini}} (1 - |\pi_\rho|^s)^{-1},$$

où π_ρ désigne une uniformisante de E_ρ . Notons

$$G_\infty(s) = \pi^{-r_1 s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \cdot (2\pi)^{r_2(1-s)} \cdot \Gamma(s)^{r_2};$$

alors

$$\zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}) = G_\infty(s) \cdot \zeta_E(s),$$

où ζ_E désigne la fonction zeta de Dedekind de l'extension E .

B) Calcul de l'intégrale toroïdale

Dans la suite, on notera I l'intégrale toroïdale:

$$I = \int_{T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A}) \backslash T(\mathbf{A})} E(\varphi, x, \omega) d\mu_{Z \backslash T}(x).$$

On a vu que l'image par π_1 du quotient $(T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A}) \backslash T(\mathbf{A}))$ est

$$Z_\infty T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\widehat{\mathbf{Z}})$$

Mais ce groupe est isomorphe au quotient suivant:

$$(T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A}) \backslash T(\mathbf{A})) / (T(\widehat{\mathbf{Z}}) / Z(\widehat{\mathbf{Z}}))$$

LEMME. Soit ξ un élément de $G(\widehat{\mathbf{Z}})$; alors

$$E(\varphi, x\xi, \omega) = E(\varphi, x, \omega).$$

Démonstration. On a

$$E(\varphi, x, \omega) = \sum_{\gamma \in P(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{Q})} M(\varphi, \gamma x, \omega)$$

et

$$M(\varphi, x, \omega) = |\det x|_{\mathbf{A}}^s \cdot \int_{\mathbf{A}^\times} \varphi(et x) \cdot |t|_{\mathbf{A}}^{ns} d\mu(t).$$

Il suffit de montrer

$$M(\varphi, x, \omega) = M(\varphi, x\xi, \omega).$$

Mais $\xi \in G(\widehat{\mathbf{Z}})$ donc $|\det \xi|_{\mathbf{A}} = 1$; de plus en chaque place finie p , $\xi_p \in G(\mathbf{Z}_p)$ donc $et_p x_p \in L_p$ si et seulement si $et_p x_p \xi_p \in L_p$, ce qui prouve le lemme.

Le groupe $T(\widehat{\mathbf{Z}}) / Z(\widehat{\mathbf{Z}})$ étant compact, on choisit une mesure de Haar sur celui-ci de manière à ce qu'il soit de mesure 1. Si on prend sur le

groupe $Z_\infty T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\widehat{\mathbf{Z}})$ la mesure quotient notée $\dot{\mu}_{Z \backslash T}$, on obtient comme nouvelle expression de l'intégrale I

$$I = \int_{Z_\infty T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\widehat{\mathbf{Z}})} E(\varphi, x, \omega) d\dot{\mu}_{Z \backslash T}(x),$$

puisque la série E est invariante par l'action de $T(\widehat{\mathbf{Z}})$.

On a vu que le quotient $Z_\infty T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\widehat{\mathbf{Z}})$ s'écrit comme une réunion disjointe

$$\bigcup_{j=1}^h H_j(Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z}) \backslash T(\mathbf{R})).$$

Notons μ_{T_∞} la mesure induite par $\mu_{Z \backslash T}$ sur le quotient $Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z}) \backslash T(\mathbf{R})$; alors

$$I = \int_{Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z}) \backslash T(\mathbf{R})} \sum_{j=1}^h E(\varphi, H_j x, \omega) d\mu_{T_\infty}(x).$$

Pour chaque indice j de 1 à h , les matrices H_j et $(h_j, 1, \dots, 1, \dots) = (P_j^{-1}, 1, \dots, 1, \dots)$ sont dans une même classe de $G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}) / G(\widehat{\mathbf{Z}})$. (Cf. la remarque au-dessus de la proposition 11).

Comme les séries E sont invariantes par l'action de $G(\mathbf{Q})$ à gauche et de $G(\widehat{\mathbf{Z}})$ à droite, on obtient

$$I = \int_{Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z}) \backslash T(\mathbf{R})} \sum_{j=1}^h E(\varphi, h_j x, \omega) d\mu_{T_\infty}(x).$$

On calcule à présent les séries $E(\varphi, x, \omega)$ dans le cas particulier où $x = (x_\infty, 1, \dots, 1)$. Alors

$$\begin{aligned} E(\varphi_1(x_\infty, 1, \dots, 1, \dots), \omega) &= |\det x_\infty|^s \cdot \int_{\mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{A}^\times} |t|_{\mathbf{A}}^{ns} \cdot \sum_{\xi \in V(\mathbf{Q}) - \{0\}} \varphi(\xi t x) d\mu(t) \\ &= |\det x_\infty|^s \cdot \sum_{\xi \in V(\mathbf{Q}) - \{0\}} \int_{\mathbf{R}_+^\times \cdot \prod_p \mathbf{Z}_p^\times} |t|_{\mathbf{A}}^{ns} \cdot \varphi(\xi t x) d\mu(t) \\ &= |\det x_\infty|^s \cdot \sum_{\xi \in V(\mathbf{Q}) - \{0\}} \left(\int_0^{+\infty} t^{ns} \varphi_\infty(\xi t x_\infty) \frac{dt}{t} \cdot \prod_p \int_{\mathbf{Z}_p^\times} \varphi_p(\xi t) d\mu_p(t) \right). \end{aligned}$$

Soit ξ un élément de $V(\mathbf{Q}) - \{0\}$, de coordonnées (ξ_1, \dots, ξ_n) ; alors l'intégrale

$\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \varphi_p(\xi t) d\mu_p(t)$ est non nulle lorsque

$$\text{Max}(|\xi_1|_p, \dots, |\xi_n|_p) \leq 1.$$

Pour que le produit sur l'ensemble des nombres premiers des intégrales précédentes soit non nul, il faut donc choisir ξ de coordonnées $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ vérifiant :

$$\xi_i \in \bigcap_p (\mathbf{Q} \cap \mathbf{Z}_p);$$

donc ξ_i doit être un élément de \mathbf{Z} . Par conséquent

$$E(\varphi, (x_\infty, 1, \dots, 1, \dots), \omega) = |\det x_\infty|^s \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \int_0^{+\infty} t^{ns-1} \cdot \varphi_\infty(\xi t x_\infty) dt.$$

D'autre part on a

$$\int_0^{+\infty} t^{ns-1} \cdot \varphi_\infty(\xi t x_\infty) dt = \int_0^{+\infty} t^{ns-1} \cdot e^{-\pi t^2 F(\xi x_\infty)} dt.$$

Faisons le changement de variables

$$u = \pi t^2 \cdot F(\xi x_\infty);$$

l'intégrale ci-dessus devient

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{ns}{2}\right) \cdot \pi^{-\frac{ns}{2}} \cdot F(\xi x_\infty)^{-\frac{ns}{2}}$$

et puisque

$$F(t_1 \omega_1 + \dots + t_n \omega_n) = (t_1, \dots, t_n) \Delta \cdot {}^t \bar{\Delta} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix},$$

on a

$$(*) \quad E(\varphi, (x_\infty, 1, \dots, 1, \dots), \omega) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{ns}{2}\right) \pi^{-\frac{ns}{2}} \cdot |\det x_\infty|^s \cdot \sum_{q \in \mathbf{Z}^n - \{0\}} (q x_\infty \Delta \cdot {}^t \bar{\Delta} {}^t \bar{x}_\infty {}^t q)^{-\frac{ns}{2}}.$$

Dans le cas qui nous intéresse, les matrices x_∞ ont pour valeurs

$$x_\infty = P_j^{-1} x, \quad x \in Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z}) \setminus T(\mathbf{R}).$$

On rappelle que l'on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} \pi: (E \otimes \mathbf{R})^\times &\rightarrow T(\mathbf{R}) \\ y &\mapsto \pi(y). \end{aligned}$$

De plus, on vérifie facilement que l'on a le

LEMME. Soit y un élément de $(E \otimes \mathbf{R})^\times$;

$$\pi(y) = \Delta D(y) \Delta^{-1},$$

où $D(y)$ est la matrice diagonale $(y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$.

Soit v l'isomorphisme défini au chapitre II, en prenant pour v la place infinie, on voit que v applique $T(\mathbf{R})$ sur $(\mathbf{R}^+)^{r_1} \times (\mathbf{C}^\times)^{r_2}$ et que

$$v \circ \pi(y) = (y^{(1)}, \dots, y^{(r_1+r_2)}).$$

Pour $y = (y^{(1)}, \dots, y^{(r_1+r_2)})$ un élément de $(\mathbf{R}^\times)^{r_1} \times (\mathbf{C}^\times)^{r_2}$, on note

$$Ny = \prod_{i=1}^{r_1+r_2} |y_i|^{e_i} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{y} = \prod_{i=1}^{r_1+r_2} \frac{dy_i}{|y_i|^{e_i}},$$

avec

$$e_i = 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq r_1$$

et

$$e_i = 2 \quad \text{pour} \quad r_1 + 1 \leq i \leq r_1 + r_2.$$

Définition 2. Soit P une matrice d'ordre n réelle, symétrique, définie positive; on définit la série d'Epstein $Z(P, s)$ où s est un nombre complexe vérifiant $\text{Re } s > \frac{n}{2}$:

$$Z(P, s) = \frac{1}{2} \sum_{q \in \mathbf{Z}^n - \{0\}} (q P^t q)^{-s}.$$

Avec cette définition et en utilisant la relation (*), l'intégrale I se réécrit à présent

$$I = \Gamma\left(\frac{ns}{2}\right) \cdot \pi^{-\frac{ns}{2}} \cdot J,$$

où J est définie par

$$J = \sum_{j=1}^h \int_{y=(y_1, \dots, y_{r_1+r_2}) \in \mathcal{D}} (Ny)^s \cdot Z\left(P_j^{-1} \Delta D(y) \overline{D(y)} {}^t \overline{\Delta} {}^t P_j^{-1}, \frac{ns}{2}\right) \frac{dy}{y}$$

et \mathcal{D} est un domaine fondamental dans $(\mathbf{R}^\times)^{r_1} \times (\mathbf{C}^\times)^{r_2}$ correspondant par l'isomorphisme v à un domaine fondamental de $Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z}) \setminus T(\mathbf{R})$.

Posons comme nouvelles variables

$$\tau_1 = |y_1|^2; \dots; \tau_{r_1+r_2} = |y_{r_1+r_2}|^2$$

et pour toute matrice P de $G(\mathbf{R})$, écrivons

$$P^0 = (\det P)^{-1/n} \cdot P;$$

il vient

$$J = 2^{r_1-1} (4\pi)^{r_1} \cdot 2^{-(r_1+r_2)} \cdot |d_E|^{-s/2} \cdot K,$$

avec

$$K = \sum_{j=1}^h \int Z \left((P_j^0)^{-1} \Delta^0 D(\tau) {}^t \overline{\Delta^0} {}^t (P_j^0)^{-1}, \frac{ns}{2} \right) \prod_{i=1}^{r_1+r_2} \frac{d\tau_i}{\tau_i},$$

où l'intégrale porte sur les $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{r_1+r_2}) \in U/H$ et où $d_E = \det(\Delta)^2$ désigne le discriminant de E , $D(\tau)$ la matrice diagonale

$$(\tau_1, \dots, \tau_{r_1+1}, \dots, \tau_{r_1+r_2}, \tau_{r_1+1}, \dots, \tau_{r_1+r_2}),$$

H le sous-espace de $(\mathbf{R}_+^{\times})^{r_1+r_2}$ défini par l'équation

$$\prod_{i=1}^{r_1+r_2} \tau_i^{e_i} = 1$$

et U l'image dans H des unités du corps de nombres E .

On fait encore le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_+^{r_1+r_2} &\rightarrow \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^r \\ (\tau_1, \dots, \tau_{r_1+r_2}) &\mapsto (u, x_1, \dots, x_r) \end{aligned}$$

où $r = r_1 + r_2 - 1$ et

$$\tau_j = u \cdot \prod_{i=1}^r |\varepsilon_i^{(j)}|^{2x_i} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq r_1 + r_2,$$

où $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ est un système d'unités fondamentales de E .

Le Jacobien de ce changement de variables est

$$\left(\prod_{i=1}^{r_1+r_2} \tau_i \right) u^{-1} \cdot 2^{r_1-1} \cdot n R,$$

où R désigne le régulateur de E défini par

$$R = \frac{1}{n} \cdot 2^{r_2} \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1^{(1)} & \dots & \varepsilon_r^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon_1^{(r+1)} & \dots & \varepsilon_r^{(r+1)} \end{vmatrix}$$

D'autre part, les unités de E ont pour image le réseau Z' dans \mathbf{R}' et les racines de l'unité contenues dans E ont pour image le vecteur nul. Si on note w le nombre de ces racines alors le cardinal de U est $\frac{w}{2}$.

Finalement l'expression K devient

$$K = 2^{r_1} \cdot w^{-1} n R \sum_{j=1}^h \int_{x \in [0,1]^r} Z \left(P_{j,x}^0, \frac{ns}{2} \right) dx,$$

où on a noté $P_{j,x}$ la matrice

$$P_{j,x} = P_j^{-1} \Delta D(\tau) {}^t \overline{\Delta} {}^t (P_j^{-1}).$$

Réécrivons à présent l'égalité du théorème 1 avec les expressions qui viennent d'être calculées.

PROPOSITION 12 (Formule de Hecke). *Soit*

$$\Lambda_E(s) = (2^{r_2} \pi^{n/2} |d_E|^{1/2})^{-s} \Gamma \left(\frac{s}{2} \right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2} \zeta_E(s)$$

et pour une matrice P réelle, symétrique, définie positive, posons

$$\Lambda(P, s) = \pi^{-s} \Gamma(s) Z(P, s).$$

Alors

$$w \cdot \Lambda_E(s) = 2^{r_1-1} \cdot n R \sum_{j=1}^h \int_{x \in [0,1]^r} \Lambda \left(P_{j,x}^0, \frac{ns}{2} \right) dx.$$

Remarque. Il serait intéressant de faire le calcul précédent dans un cas plus général où l'on considère un quasi-caractère ω de \mathbf{A}^\times quelconque. Ainsi $\omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}$ correspond à un caractère de Hecke sur le groupe des idéaux de E (cf. [4], chap. 8, §3, p. 156) et la difficulté est alors de calculer l'intégrale toroïdale aux places finies sur lesquelles le quasi-caractère $\omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}$ se ramifie.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOREL, A. *Linear algebraic groups*. Benjamin (1969).
- [2] BOREVITCH, Z. I. et I. R. CHAFAREVITCH. *Théorie des Nombres*. Gauthiers Villars (1967).
- [3] BOURBAKI, N. *Algèbre, chapitres V, VII*. Masson (1981).
- [4] GOLDSTEIN, L. J. *Analytic number theory*. Prentice Hall (1971).