1. La projection de G(Q)Z(A)\G(A) sur la place à l'infini

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Chapitre VI

La formule intégrale de Hecke

Le but de ce chapitre est d'utiliser la formule établie dans le théorème 1, dans le cas particulier où k est le corps $\mathbf{Q}$ et E un corps de nombres sur $\mathbf{Q}$, afin d'obtenir la formule intégrale de Hecke classique (Réf. [H]). Dans un premier paragraphe on construira une application de l'ensemble des matrices $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ dans l'ensemble $G(\mathbf{Z})\cdot Z_\infty\backslash G(\mathbf{R})$ des matrices réelles et on calculera l'image par cette application du tore $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})$. Dans le deuxième paragraphe, on utilisera cette application pour retrouver la formule de Hecke à partir de l'identité du chapitre précédent (Théorème 1).

1. La projection de $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ sur la place à l'infini

A. *La projection* $\pi_1 : G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A}) \to Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$

L'ensemble Z_∞ désigne le sous-groupe de $G(\mathbf{A})$ constitué des matrices z telles que z_∞ soit une matrice scalaire non nulle et z_p est la matrice identité pour tout nombre p premier.

Soient $M \in G(\mathbf{A})$ et $z \in (\mathbf{A})$ avec

$$Z = \begin{pmatrix} z_p & & \\ & \ddots & \\ & & z_p \end{pmatrix}$$

où pour p fini, on exige que $z_p \in \mathbf{Z}_p^\times$ pour presque tout p et $z_p \in \mathbf{Q}_p^\times$ pour tout p.

Soit S l'ensemble des nombres premiers p tels que $z_p \notin \mathbf{Z}_p^\times$ et soit p un élément de S, il existe un entier n_p vérifiant

$$p^{n_p} \cdot z_p \in \mathbf{Z}_p^\times .$$

Soit Q la matrice scalaire de $Z(\mathbf{Q})$ dont les éléments diagonaux valent $\prod_{p\in S} p^{n_p}$; ZQ est une matrice de $Z_\infty \cdot G(\hat{\mathbf{Z}})$.

Soit $(ZQ)_f$ la matrice adélique coïncidant avec ZQ aux places finies et égale à 1 à la place infinie, et $(ZQ)_\infty$ la matrice adélique égale à $Z_\infty Q$ à la place infinie et égale à 1 aux places finies; on a la décomposition suivante:

$$\begin{aligned} ZM &= ZQ \cdot Q^{-1}M \\ &= (ZQ)_\infty \cdot (ZQ)_f \cdot Q^{-1}M \\ &= (ZQ)_\infty \, Q^{-1}M(ZQ)_f \, . \end{aligned}$$

Ce qui précède montre que la projection π_1 qui a un élément de $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ fait correspondre la classe dans $Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ d'un représentant quelconque de cet élément, est bien définie.

B. *Il y a une bijection* π_2 *entre* $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ *et* $G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$

En effet, on considère l'application de $G(\mathbf{R})$ dans $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ qui a une matrice g de $G(\mathbf{R})$ associe la classe de $(g, 1, ..., 1, ...)$ dans $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$. Cette application est surjective puisqu'on a la décomposition bien connue de $G(\mathbf{A})$:

$$G(\mathbf{A}) = G(\mathbf{Q}) \cdot G^+(\mathbf{R}) \cdot G(\hat{\mathbf{Z}})$$

(voir par exemple [5], pp. 143-146 pour le cas $n = 2$ et la démonstration est la même pour n quelconque).

Supposons que les matrices g et g' aient la même image. Alors on a une égalité

$$\gamma g k = \gamma' g' k' \, ,$$

avec $\gamma, \gamma' \in G(\mathbf{Q})$ et $k, k' \in G(\hat{\mathbf{Z}})$; par suite

$$\gamma^{-1}\gamma' = g \, k \, k'^{-1} \, g'^{-1} = g \, g'^{-1} \, k \, k'^{-1} \, .$$

Mais l'intersection $G(\mathbf{Q}) \cap G(\mathbf{R}) \cdot G(\hat{\mathbf{Z}})$ est réduite à $G(\mathbf{Z})$; cela entraîne l'existence d'un élément σ de $G(\mathbf{Z})$ tel que

$$\gamma' = \gamma\sigma \, , \quad g = \sigma g' \, , \quad k = \sigma k' \, .$$

Ainsi g et g' ont la même image si et seulement si ces matrices sont congrues modulo $G(\mathbf{Z})$. On a démontré:

PROPOSITION 10. *L'application* $\pi_2 \circ \pi_1$ *où*

$$\pi_1 : G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A}) \to Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$$

et

$$\pi_2 : Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}}) \to Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$$

sont définies comme précédemment, n'est autre que la projection canonique de $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ *sur* $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$.

C. *L'image du tore* $T(\mathbf{A})$ *dans* $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$

L'image de $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})$ dans $Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ est

$$Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}}) .$$

Dans le cas particulier où l'on considère un corps de nombres E sur $\mathbf{Q}$, muni d'une base fondamentale $(\omega_1, ..., \omega_n)$, on déduit de la proposition 3 du chapitre II et de la remarque qui suit qu'il y a un isomorphisme ν de $T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$, sur $E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times)$, où $r_\mathfrak{p}$ désigne le sous-anneau compact maximal de $E_\mathfrak{p}$. Ainsi $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ s'identifie à l'ensemble $\mathbf{R}^\times \cdot E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times)$ qui se projette dans le groupe des classes d'idéaux de E

$$E_\infty^\times E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times) ,$$

où on a noté E_∞ le produit des complétés aux places infinies $\prod_{v\in P_\infty} E_v$. Soient h le nombre de classes de E et $(a_j)_{j=1 \text{ à } h}$, un système de représentants de ces classes dans $\mathbf{A}_E^\times$, on a une bijection

$$\mathbf{R}^\times \cdot E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times) \to \bigcup_{j=1 \text{ à } h} a_j \cdot (\mathbf{R}^\times\backslash E_\infty^\times) .$$

En combinant cette bijection avec l'isomorphisme

$$Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}}) \tilde{\to} \mathbf{R}^\times \cdot E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times) ,$$

on peut écrire

$$Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}}) = \bigcup_{j=1 \text{ à } h} H_j \cdot \left(Z_\infty T(\mathbf{Z})\backslash T_\infty(\mathbf{A})\right) ,$$

où la réunion est disjointe et où la classe de la matrice $H_j \in T(\mathbf{A})$ dans $T_\infty(\mathbf{A}) \cdot T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ correspond à la classe de l'élément a_j de $\mathbf{A}_E^\times$ dans $E_\infty^\times \cdot E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times)$. On choisit de plus H_j telle que

$$(H_j)_\infty = 1 .$$

On cherche à présent l'image du quotient $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ dans $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$. Si on note h_j l'image de la matrice H_j dans $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$ alors l'image de $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ est $\bigcup_{j=1 \text{ à } h} h_j(Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R}))$.

Reste à déterminer un système de matrices h_j. Pour chaque élément a_j de $\mathbf{A}_E^{\times}$ dans le système de représentants des classes d'idèles, on note $a_j = [\alpha_{1j}, ..., \alpha_{nj}]$ un idéal de E dont la classe correspond par I_E (voir la proposition du chapitre II) à la classe a_j.

Définition 1. On note P_j l'élément de $G(\mathbf{Q})$, matrice de passage de la base fondamentale $(\omega_1, ..., \omega_n)$ de E à la base $[\alpha_{1j}, ..., \alpha_{nj}]$ de l'idéal a_j, dont la i^e ligne est constituée des coordonnées du vecteur α_{ij} dans la base $(\omega_1, ..., \omega_n)$.

D'autre part, on a le diagramme d'isomorphismes commutatif suivant déduit de la proposition 4 du chapitre II

$$\begin{array}{ccccc} E_\infty^{\times}\backslash \mathbf{A}_E^{\times}/(\prod r_{\mathfrak{p}}^{\times} & \underset{v^{-1}}{\rightarrow} & T_\infty(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}}) & \subset & G_\infty(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}}) \\ I_E \downarrow\wr & & I_T \downarrow\wr & & I_T \downarrow\wr \\ \textit{Idéaux de } E & \underset{\Omega^{-1}}{\tilde{\rightarrow}} & \Omega^{-1}\,(\textit{Idéaux de } E) & \subset & \textit{Réseaux de } \mathbf{Q}^n \end{array}$$

Le réseau image par I_T de la matrice $(1, P_j, ..., P_j, ...)$ de $G(\mathbf{A})$ est le réseau associé à l'idéal a_j par l'application Ω^{-1}. En effet, quelque soit la place v finie, les vecteurs qui engendrent le réseau $(r_v^n \cdot P_j)$ ont pour coordonnées dans la base canonique les coordonnées de $\alpha_{1j}, ..., \alpha_{nj}$ dans la base $(\omega_1, ..., \omega_n)$.

On en déduit que

$$H_j = (1, \prod_p (H_j)_p) \equiv (1, P_j, ..., P_j, ...) \bmod G(\hat{\mathbf{Z}})$$

et par suite la matrice h_j est l'image de $(1, P_j, ..., P_j, ...)$ dans $Z_\infty G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$, c'est-à-dire P_j^{-1}. Par suite:

PROPOSITION 11. *L'image du tore* $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ *dans*

$$Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$$

est la réunion $\bigcup_{j=1}^{h} P_j^{-1} \cdot (Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R}))$.