formule intégrale de Hecke

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Chapitre VI

La formule intégrale de Hecke

Le but de ce chapitre est d'utiliser la formule établie dans le théorème 1, dans le cas particulier où k est le corps $\mathbf{Q}$ et E un corps de nombres sur $\mathbf{Q}$, afin d'obtenir la formule intégrale de Hecke classique (Réf. [H]). Dans un premier paragraphe on construira une application de l'ensemble des matrices $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ dans l'ensemble $G(\mathbf{Z})\cdot Z_\infty\backslash G(\mathbf{R})$ des matrices réelles et on calculera l'image par cette application du tore $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})$. Dans le deuxième paragraphe, on utilisera cette application pour retrouver la formule de Hecke à partir de l'identité du chapitre précédent (Théorème 1).

1. La projection de $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ sur la place à l'infini

A. *La projection* $\pi_1 : G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A}) \to Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$

L'ensemble Z_∞ désigne le sous-groupe de $G(\mathbf{A})$ constitué des matrices z telles que z_∞ soit une matrice scalaire non nulle et z_p est la matrice identité pour tout nombre p premier.

Soient $M \in G(\mathbf{A})$ et $z \in (\mathbf{A})$ avec

$$Z = \begin{pmatrix} z_p & & \\ & \ddots & \\ & & z_p \end{pmatrix}$$

où pour p fini, on exige que $z_p \in \mathbf{Z}_p^\times$ pour presque tout p et $z_p \in \mathbf{Q}_p^\times$ pour tout p.

Soit S l'ensemble des nombres premiers p tels que $z_p \notin \mathbf{Z}_p^\times$ et soit p un élément de S, il existe un entier n_p vérifiant

$$p^{n_p} \cdot z_p \in \mathbf{Z}_p^\times .$$

Soit Q la matrice scalaire de $Z(\mathbf{Q})$ dont les éléments diagonaux valent $\prod_{p\in S} p^{n_p}$; ZQ est une matrice de $Z_\infty \cdot G(\hat{\mathbf{Z}})$.

Soit $(ZQ)_f$ la matrice adélique coïncidant avec ZQ aux places finies et égale à 1 à la place infinie, et $(ZQ)_\infty$ la matrice adélique égale à $Z_\infty Q$ à la place infinie et égale à 1 aux places finies; on a la décomposition suivante:

$$\begin{aligned} ZM &= ZQ \cdot Q^{-1}M \\ &= (ZQ)_\infty \cdot (ZQ)_f \cdot Q^{-1}M \\ &= (ZQ)_\infty \, Q^{-1}M(ZQ)_f \, . \end{aligned}$$

Ce qui précède montre que la projection π_1 qui a un élément de $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ fait correspondre la classe dans $Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ d'un représentant quelconque de cet élément, est bien définie.

B. *Il y a une bijection* π_2 *entre* $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ *et* $G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$

En effet, on considère l'application de $G(\mathbf{R})$ dans $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ qui a une matrice g de $G(\mathbf{R})$ associe la classe de $(g, 1, ..., 1, ...)$ dans $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$. Cette application est surjective puisqu'on a la décomposition bien connue de $G(\mathbf{A})$:

$$G(\mathbf{A}) = G(\mathbf{Q}) \cdot G^+(\mathbf{R}) \cdot G(\hat{\mathbf{Z}})$$

(voir par exemple [5], pp. 143-146 pour le cas $n = 2$ et la démonstration est la même pour n quelconque).

Supposons que les matrices g et g' aient la même image. Alors on a une égalité

$$\gamma g k = \gamma' g' k' \, ,$$

avec $\gamma, \gamma' \in G(\mathbf{Q})$ et $k, k' \in G(\hat{\mathbf{Z}})$; par suite

$$\gamma^{-1}\gamma' = g \, k \, k'^{-1} \, g'^{-1} = g \, g'^{-1} \, k \, k'^{-1} \, .$$

Mais l'intersection $G(\mathbf{Q}) \cap G(\mathbf{R}) \cdot G(\hat{\mathbf{Z}})$ est réduite à $G(\mathbf{Z})$; cela entraîne l'existence d'un élément σ de $G(\mathbf{Z})$ tel que

$$\gamma' = \gamma\sigma \, , \quad g = \sigma g' \, , \quad k = \sigma k' \, .$$

Ainsi g et g' ont la même image si et seulement si ces matrices sont congrues modulo $G(\mathbf{Z})$. On a démontré:

PROPOSITION 10. *L'application* $\pi_2 \circ \pi_1$ *où*

$$\pi_1 : G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A}) \to Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$$

et

$$\pi_2 : Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}}) \to Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$$

sont définies comme précédemment, n'est autre que la projection canonique de $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ *sur* $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$.

C. *L'image du tore* $T(\mathbf{A})$ *dans* $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$

L'image de $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})$ dans $Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ est

$$Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}}) .$$

Dans le cas particulier où l'on considère un corps de nombres E sur $\mathbf{Q}$, muni d'une base fondamentale $(\omega_1, ..., \omega_n)$, on déduit de la proposition 3 du chapitre II et de la remarque qui suit qu'il y a un isomorphisme ν de $T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$, sur $E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times)$, où $r_\mathfrak{p}$ désigne le sous-anneau compact maximal de $E_\mathfrak{p}$. Ainsi $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ s'identifie à l'ensemble $\mathbf{R}^\times \cdot E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times)$ qui se projette dans le groupe des classes d'idéaux de E

$$E_\infty^\times E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times) ,$$

où on a noté E_∞ le produit des complétés aux places infinies $\prod_{v\in P_\infty} E_v$. Soient h le nombre de classes de E et $(a_j)_{j=1 \text{ à } h}$, un système de représentants de ces classes dans $\mathbf{A}_E^\times$, on a une bijection

$$\mathbf{R}^\times \cdot E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times) \to \bigcup_{j=1 \text{ à } h} a_j \cdot (\mathbf{R}^\times\backslash E_\infty^\times) .$$

En combinant cette bijection avec l'isomorphisme

$$Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}}) \tilde{\to} \mathbf{R}^\times \cdot E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times) ,$$

on peut écrire

$$Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}}) = \bigcup_{j=1 \text{ à } h} H_j \cdot \left(Z_\infty T(\mathbf{Z})\backslash T_\infty(\mathbf{A})\right) ,$$

où la réunion est disjointe et où la classe de la matrice $H_j \in T(\mathbf{A})$ dans $T_\infty(\mathbf{A}) \cdot T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ correspond à la classe de l'élément a_j de $\mathbf{A}_E^\times$ dans $E_\infty^\times \cdot E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times)$. On choisit de plus H_j telle que

$$(H_j)_\infty = 1 .$$

On cherche à présent l'image du quotient $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ dans $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$. Si on note h_j l'image de la matrice H_j dans $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$ alors l'image de $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ est $\bigcup_{j=1 \text{ à } h} h_j(Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R}))$.

Reste à déterminer un système de matrices h_j. Pour chaque élément a_j de $\mathbf{A}_E^{\times}$ dans le système de représentants des classes d'idèles, on note $a_j = [\alpha_{1j}, ..., \alpha_{nj}]$ un idéal de E dont la classe correspond par I_E (voir la proposition du chapitre II) à la classe a_j.

Définition 1. On note P_j l'élément de $G(\mathbf{Q})$, matrice de passage de la base fondamentale $(\omega_1, ..., \omega_n)$ de E à la base $[\alpha_{1j}, ..., \alpha_{nj}]$ de l'idéal a_j, dont la i^e ligne est constituée des coordonnées du vecteur α_{ij} dans la base $(\omega_1, ..., \omega_n)$.

D'autre part, on a le diagramme d'isomorphismes commutatif suivant déduit de la proposition 4 du chapitre II

$$\begin{array}{ccccc} E_\infty^{\times}\backslash \mathbf{A}_E^{\times}/(\prod r_{\mathfrak{p}}^{\times} & \underset{v^{-1}}{\rightarrow} & T_\infty(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}}) & \subset & G_\infty(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}}) \\ I_E \downarrow\wr & & I_T \downarrow\wr & & I_T \downarrow\wr \\ \textit{Idéaux de } E & \underset{\Omega^{-1}}{\tilde{\rightarrow}} & \Omega^{-1}\,(\textit{Idéaux de } E) & \subset & \textit{Réseaux de } \mathbf{Q}^n \end{array}$$

Le réseau image par I_T de la matrice $(1, P_j, ..., P_j, ...)$ de $G(\mathbf{A})$ est le réseau associé à l'idéal a_j par l'application Ω^{-1}. En effet, quelque soit la place v finie, les vecteurs qui engendrent le réseau $(r_v^n \cdot P_j)$ ont pour coordonnées dans la base canonique les coordonnées de $\alpha_{1j}, ..., \alpha_{nj}$ dans la base $(\omega_1, ..., \omega_n)$.

On en déduit que

$$H_j = (1, \prod_p (H_j)_p) \equiv (1, P_j, ..., P_j, ...) \bmod G(\hat{\mathbf{Z}})$$

et par suite la matrice h_j est l'image de $(1, P_j, ..., P_j, ...)$ dans $Z_\infty G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$, c'est-à-dire P_j^{-1}. Par suite:

PROPOSITION 11. *L'image du tore* $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ *dans*

$$Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$$

est la réunion $\bigcup_{j=1}^{h} P_j^{-1} \cdot (Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R}))$.

2. La formule intégrale de Hecke

On suppose toujours que E un corps de nombres sur $\mathbf{Q}$. En choisissant pour g la matrice identité, la formule adélique donnée dans le théorème 1 du chapitre précédent devient

$$\int_{T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})} E(\varphi, x, \omega)\, d\mu_{Z\backslash T}(x) = \zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}) .$$

On définit le quasi-caractère ω de $\mathbf{A}^\times/\mathbf{Q}^\times$ de la manière suivante:

$$\omega(t) = |t|_{\mathbf{A}}^s , \qquad t \in \mathbf{A}^\times ,$$

avec $s \in \mathbf{C}$ et $\sigma = \mathrm{Res} > 1$.

Ainsi

$$\omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}(t) = |t|_{\mathbf{A}_E}^s , \qquad t \in \mathbf{A}_E^\times .$$

On définit la fonction φ de $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}))$ par

$$\varphi = \prod \varphi_p$$

avec, pour les *places finies*,

$$\varphi_p(t_p) = \chi_{L_p}(t_p) , \qquad t_p \in E \otimes \mathbf{Q}_p ,$$

où χ_{L_p} est la fonction caractéristique du réseau L_p engendré dans $E \otimes \mathbf{Q}_p$ par la base fondamentale $(\omega_1, ..., \omega_n)$ de E sur $\mathbf{Q}$.

On note μ_p comme au chapitre II, l'isomorphisme de $E \otimes \mathbf{Q}_p$ sur $\prod_{\mathfrak{p}|p} E$; le réseau L_p étant engendré par une base fondamentale, on a

$$\mu_p(L_p) = \prod_{\mathfrak{p}|p} r_{\mathfrak{p}} ,$$

de sorte que

$$\varphi_p \circ \mu_p^{-1} = \prod_{\mathfrak{p}|p} \chi r_{\mathfrak{p}} .$$

Pour la place *infinie*, on pose

$$\varphi_\infty(t) = e^{-\pi F(t)} , \qquad t \in E \otimes \mathbf{R} ,$$

avec la fonction F définie par

$$F(t) = \sum_{i=1}^{r_1} \sigma_i(t)^2 + 2 \sum_{i=r_1+1}^{r_1+r_2} |\sigma_i(t)|^2 ,$$

où $(\sigma_i)_{1 \leqslant i \leqslant r_1}$ désignent les r_1 plongements de E dans $\mathbf{R}$, $(\sigma_i)_{r_1+1 \leqslant i \leqslant r_1+r_2}$

les r_2 plongements de E dans $\mathbf{C}$ non conjugués deux à deux et

$$\sigma_{r_1+r_2+i} = \overline{\sigma_{r_1+i}} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant r_2 .$$

La fonction F peut également s'exprimer pour un élément $t = t_1\omega_1 + \ldots + t_n\omega_n$ de $E \otimes \mathbf{R}$ de la manière suivante:

$$F(t_1\omega_1 + \ldots + t_n\omega_n) = \sum_{i=1}^{r_1} (t_1\omega_1^{(i)} + \ldots + t_n\omega_n^{(i)})^2$$

$$+ 2 \sum_{i=r_1+1}^{r_1+r_2} | t_1\omega_1^{(i)} + \ldots + t_n\omega_n^{(i)} |^2 = (t_1, \ldots, t_n)\Delta \cdot {}^t\overline{\Delta} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} ,$$

où on a noté $\omega_j^{(i)} = \sigma_i(\omega_j)$ et Δ la matrice

$$\begin{pmatrix} \omega_1^{(1)} & \cdots & \omega_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_n^{(1)} & \cdots & \omega_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Enfin, on note comme au chapitre V:

μ_E la mesure de Haar sur $\mathbf{A}_E^\times$ obtenue en prenant $\mu_E = \prod \mu_\mathfrak{p}$ avec $\mu_\mathfrak{p}(r_\mathfrak{p}^\times) = 1$ pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de E, $d\mu_\mathfrak{p}(x) = \dfrac{dx}{|x|}$ pour les places réelles de E et $d\mu_\mathfrak{p}(x) = |x|^{-2} \cdot |dx \wedge d\bar{x}|$ pour les places complexes de E,

μ_T la mesure de Haar sur $T(\mathbf{A})$ et $T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})$,

μ la mesure de Haar sur $\mathbf{A}^\times$, $\mathbf{Q}^\times\backslash\mathbf{A}^\times$ et $Z(\mathbf{Q})\backslash Z(\mathbf{A})$,

$\mu_{Z\backslash T}$ la mesure de Haar sur $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})$.

A) *Calcul de* $\zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/\mathbf{Q}})$

Pour $\sigma > 1$, on a les égalités suivantes:

$$\zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}) = \int_{\mathbf{A}_E^\times} \varphi(t) \cdot |t|_{\mathbf{A}_E}^s \, d\mu_E(t) = \prod_\mathfrak{p} \int_{E_\mathfrak{p}^\times} \varphi_\mathfrak{p} |t_\mathfrak{p}| \cdot |t_\mathfrak{p}|^s \, d\mu_\mathfrak{p}(t_\mathfrak{p})$$

(cf. [6], Prop. 10, p. 119).

Alors en utilisant [6], Prop. 11, p. 120 et lemme 8, p. 127, on obtien

$$\zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}) = \pi^{-r_1 s/2} \, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} (2\pi)^{r_2(1-2)} \Gamma(s)^{r_2} \cdot \prod_{\mathfrak{p} \text{ fini}} (1 - |\pi_\mathfrak{p}|^s)^{-1} ,$$

où $\pi_\mathfrak{p}$ désigne une uniformisante de $E_\mathfrak{p}$. Notons

$$G_\infty(s) = \pi^{-r_1 s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \cdot (2\pi)^{r_2(1-s)} \cdot \Gamma(s)^{r_2};$$

alors

$$\zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}) = G_\infty(s) \cdot \zeta_E(s),$$

où ζ_E désigne la fonction zeta de Dedekind de l'extension E.

B) *Calcul de l'intégrale toroïdale*

Dans la suite, on notera I l'intégrale toroïdale:

$$I = \int_{T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})} E(\varphi, x, \omega) d\mu_{Z\backslash T}(x).$$

On a vu que l'image par π_1 du quotient $(T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A}))$ est

$$Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$$

Mais ce groupe est isomorphe au quotient suivant:

$$(T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A}))/(T(\hat{\mathbf{Z}})/Z(\hat{\mathbf{Z}}))$$

LEMME. *Soit* ξ *un élément de* $G(\hat{\mathbf{Z}})$; *alors*

$$E(\varphi, x\xi, \omega) = E(\varphi, x, \omega).$$

Démonstration. On a

$$E(\varphi, x, \omega) = \sum_{\gamma \in P(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{Q})} M(\varphi, \gamma x, \omega)$$

et

$$M(\varphi, x, \omega) = |\det x|_{\mathbf{A}}^{s} \cdot \int_{\mathbf{A}^\times} \varphi(et\, x) \cdot |t|_{\mathbf{A}}^{ns} d\mu(t).$$

Il suffit de montrer

$$M(\varphi, x, \omega) = M(\varphi, x\xi, \omega).$$

Mais $\xi \in G(\hat{\mathbf{Z}})$ donc $|\det \xi|_{\mathbf{A}} = 1$; de plus en chaque place finie p, $\xi_p \in G(\mathbf{Z}_p)$ donc $et_p x_p \in L_p$ si et seulement si $et_p x_p \xi_p \in L_p$, ce qui prouve le lemme.

Le groupe $T(\hat{\mathbf{Z}})/Z(\hat{\mathbf{Z}})$ étant compact, on choisit une mesure de Haar sur celui-ci de manière à ce qu'il soit de mesure 1. Si on prend sur le

groupe $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ la mesure quotient notée $\dot{\mu}_{Z\backslash T}$, on obtient comme nouvelle expression de l'intégrale I

$$I = \int_{Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})} E(\varphi, x, \omega)\, d\dot{\mu}_{Z\backslash T}(x)\,,$$

puisque la série E est invariante par l'action de $T(\hat{\mathbf{Z}})$.
On a vu que le quotient $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ s'écrit comme une réunion disjointe

$$\bigcup_{j=1}^{h} H_j(Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R}))\,.$$

Notons μ_{T_∞} la mesure induite par $\mu_{Z\backslash T}$ sur le quotient $Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R})$; alors

$$I = \int_{Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R})} \sum_{j=1}^{h} E(\varphi, H_j x, \omega) d\mu_{T_\infty}(x)\,.$$

Pour chaque indice j de 1 à h, les matrices H_j et $(h_j, 1, ..., 1, ...) = (P_j^{-1}, 1, ..., 1, ...)$ sont dans une même classe de $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$. (Cf. la remarque au-dessus de la proposition 11).

Comme les séries E sont invariantes par l'action de $G(\mathbf{Q})$ à gauche et de $G(\hat{\mathbf{Z}})$ à droite, on obtient

$$I = \int_{Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R})} \sum_{j=1}^{h} E(\varphi, h_j x, \omega) d\mu_{T_\infty}(x)\,.$$

On calcule à présent les séries $E(\varphi, x, \omega)$ dans le cas particulier où $x = (x_\infty, 1, ..., 1)$. Alors

$$E(\varphi_1(x_\infty, 1, ..., 1, ...), \omega) = |\det x_\infty|^s \cdot \int_{\mathbf{Q}^\times\backslash\mathbf{A}^\times} |t|_{\mathbf{A}}^{ns} \cdot \sum_{\xi\in V(\mathbf{Q})-\{0\}} \varphi(\xi t x) d\mu(t)$$

$$= |\det x_\infty|^s \cdot \sum_{\xi\in V(\mathbf{Q})-\{0\}} \int_{\mathbf{R}_+^\times \cdot \prod_p \mathbf{Z}_p^\times} |t|_{\mathbf{A}}^{ns} \cdot \varphi(\xi t x) d\mu(t)$$

$$= |\det x_\infty|^s \cdot \sum_{\xi\in V(\mathbf{Q})-\{0\}} \left(\int_0^{+\infty} t^{ns} \varphi_\infty(\xi t x_\infty) \frac{dt}{t} \cdot \prod_p \int_{\mathbf{Z}_p^\times} \varphi_p(\xi t) d\mu_p(t) \right).$$

Soit ξ un élément de $V(\mathbf{Q}) - \{0\}$, de coordonnées $(\xi_1, ..., \xi_n)$; alors l'intégrale $\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \varphi_p(\xi t) d\mu_p(t)$ est non nulle lorsque

$$\mathrm{Max}(|\xi_1|_p, ..., |\xi_n|_p) \leqslant 1\,.$$

Pour que le produit sur l'ensemble des nombres premiers des intégrales précédentes soit non nul, il faut donc choisir ξ de coordonnées $(\xi_i)_{1 \text{ à } n}$ vérifiant :

$$\xi_i \in \bigcap_p (\mathbf{Q} \cap \mathbf{Z}_p) ;$$

donc ξ_i doit être un élément de $\mathbf{Z}$. Par conséquent

$$E(\varphi, (x_\infty, 1, ..., 1, ...), \omega) = |\det x_\infty|^s \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \int_0^{+\infty} t^{ns-1} \cdot \varphi_\infty(\xi t x_\infty) dt .$$

D'autre part on a

$$\int_0^{+\infty} t^{ns-1} \cdot \varphi_\infty(\xi t x_\infty) dt = \int_0^{+\infty} t^{ns-1} \cdot e^{-\pi t^2 F(\xi x_\infty)} dt .$$

Faisons le changement de variables

$$u = \pi t^2 \cdot F(\xi x_\infty);$$

l'intégrale ci-dessus devient

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{ns}{2}\right) \cdot \pi^{-\frac{ns}{2}} \cdot F(\xi x_\infty)^{-\frac{ns}{2}}$$

et puisque

$$F(t_1\omega_1 + ... + t_n\omega_n) = (t_1, ..., t_n)\Delta \cdot {}^t\overline{\Delta} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix},$$

on a

(*)
$$E(\varphi, (x_\infty, 1, ..., 1, ...), \omega)$$
$$= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{ns}{2}\right) \pi^{-\frac{ns}{2}} \cdot |\det x_\infty|^s \cdot \sum_{q \in \mathbf{Z}^n - \{0\}} (q x_\infty \Delta \cdot {}^t\overline{\Delta}\, {}^t\bar{x}_\infty\, {}^t q)^{-\frac{ns}{2}} .$$

Dans le cas qui nous intéresse, les matrices x_∞ ont pour valeurs

$$x_\infty = P_j^{-1} x , \quad x \in Z(\mathbf{R}) T(\mathbf{Z}) \backslash T(\mathbf{R}) .$$

On rappelle que l'on a un isomorphisme

$$\pi : (E \otimes \mathbf{R})^\times \to T(\mathbf{R})$$
$$y \mapsto \pi(y) .$$

De plus, on vérifie facilement que l'on a le

LEMME. *Soit* y *un élément de* $(E\otimes\mathbf{R})^{\times}$;

$$\pi(y) = \Delta D(y)\Delta^{-1},$$

où $D(y)$ *est la matrice diagonale* $(y^{(1)}, ..., y^{(n)})$.

Soit ν l'isomorphisme défini au chapitre II, en prenant pour v la place infinie, on voit que ν applique $T(\mathbf{R})$ sur $(\mathbf{R}^{+})^{r_1} \times (\mathbf{C}^{\times})^{r_2}$ et que

$$\nu \circ \pi(y) = (y^{(1)}, ..., y^{(r_1+r_2)}).$$

Pour $y = (y^{(1)}, ..., y^{(r_1+r_2)})$ un élément de $(\mathbf{R}^{\times})^{r_1} \times (\mathbf{C}^{\times})^{r_2}$, on note

$$Ny = \prod_{i=1}^{r_1+r_2} |y_i|^{e_i} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{y} = \prod_{i=1}^{r_1+r_2} \frac{dy_i}{|y_i|^{e_i}},$$

avec

$$e_i = 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant r_1$$

et

$$e_i = 2 \quad \text{pour} \quad r_1 + 1 \leqslant i \leqslant r_1 + r_2 .$$

Définition 2. Soit P une matrice d'ordre n réelle, symétrique, définie positive; on définit la série d'Epstein $Z(P, s)$ où s est un nombre complexe vérifiant $\operatorname{Re} s > \frac{n}{2}$:

$$Z(P, s) = \frac{1}{2} \sum_{q\in\mathbf{Z}^n-\{0\}} (q\, P\, {}^t q)^{-s} .$$

Avec cette définition et en utilisant la relation (*), l'intégrale I se réécrit à présent

$$I = \Gamma\left(\frac{ns}{2}\right) \cdot \pi^{-\frac{ns}{2}} \cdot J ,$$

où J est définie par

$$J = \sum_{j=1}^{h} \int_{y=(y_1,\ldots,y_{r_1+r_2})\in\mathscr{D}} (Ny)^s \cdot Z\left(P_j^{-1}\Delta D(y)\,\overline{D(y)}\,{}^t\overline{\Delta}\,{}^t\overline{P_j^{-1}}, \frac{ns}{2}\right)\frac{dy}{y}$$

et $\mathscr{D}$ est un domaine fondamental dans $(\mathbf{R}^{\times})^{r_1} \times (\mathbf{C}^{\times})^{r_2}$ correspondant par l'isomorphisme ν à un domaine fondamental de $Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R})$.

Posons comme nouvelles variables

$$\tau_1 = |y_1|^2 ; \ldots ; \tau_{r_1+r_2} = |y_{r_1+r_2}|^2$$

et pour toute matrice P de $G(\mathbf{R})$, écrivons

$$P^0 = (\det P)^{-1/n} \cdot P ;$$

il vient

$$J = 2^{r_1-1}(4\pi)^{r_1} \cdot 2^{-(r_1+r_2)} \cdot |d_E|^{-s/2} \cdot K ,$$

avec

$$K = \sum_{j=1}^{h} \int Z\left((P_j^0)^{-1}\Delta^0 D(\tau)\, {}^t\overline{\Delta^0}\, {}^t(\overline{P_j^0})^{-1}, \frac{ns}{2}\right) \prod_{i=1}^{r_1+r_2} \frac{d\tau_i}{\tau_i} ,$$

où l'intégrale porte sur les $\tau = (\tau_1, ..., \tau_{r_1+r_2}) \in U/H$ et où $d_E = \det(\Delta)^2$ désigne le discriminant de E, $D(\tau)$ la matrice diagonale

$$(\tau_1, ..., \tau_{r_1+1}, ..., \tau_{r_1+r_2}, \tau_{r_1+1}, ..., \tau_{r_1+r_2}) ,$$

H le sous-espace de $(\mathbf{R}_+^{\times})^{r_1+r_2}$ défini par l'équation

$$\prod_{i=1}^{r_1+r_2} \tau_i^{e_i} = 1$$

et U l'image dans H des unités du corps de nombres E.

On fait encore le changement de variables suivant :

$$\mathbf{R}_+^{r_1+r_2} \to \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^r$$

$$(\tau_1, ..., \tau_{r_1+r_2}) \mapsto (u, x_1, ..., x_r)$$

où $r = r_1 + r_2 - 1$ et

$$\tau_j = u \cdot \prod_{i=1}^{r} |\varepsilon_i^{(j)}|^{2x_i} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant r_1 + r_2 ,$$

où $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r)$ est un système d'unités fondamentales de E.

Le Jacobien de ce changement de variables est

$$\left(\prod_{i=1}^{r_1+r_2} \tau_i\right) u^{-1} \cdot 2^{r_1-1} \cdot n\, R ,$$

où R désigne le régulateur de E défini par

$$R = \frac{1}{n} \cdot 2^{r_2} \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1^{(1)} & \cdots & \varepsilon_r^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon_1^{(r+1)} & \cdots & \varepsilon_r^{(r+1)} \end{vmatrix}$$

D'autre part, les unités de E ont pour image le réseau $\mathbf{Z}^r$ dans $\mathbf{R}^r$ et les racines de l'unité contenues dans E ont pour image le vecteur nul. Si on note w le nombre de ces racines alors le cardinal de U est $\frac{w}{2}$.

Finalement l'expression K devient

$$K = 2^{r_1} \cdot w^{-1} n R \sum_{j=1}^{h} \int_{x\in[0,1]^r} Z\left(P^0_{j,x}, \frac{ns}{2}\right) dx ,$$

où on a noté $P_{j,x}$ la matrice

$$P_{j,x} = P_j^{-1} \Delta D(\tau)\, {}^t\overline{\Delta}\, {}^t(\overline{P_j^{-1}}) .$$

Réécrivons à présent l'égalité du théorème 1 avec les expressions qui viennent d'être calculées.

PROPOSITION 12 (Formule de Hecke). *Soit*

$$\Lambda_E(s) = (2^{r_2} \pi^{n/2} |d_E|^{\frac{1}{2}})^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2} \zeta_E(s)$$

et pour une matrice P réelle, symétrique, définie positive, posons

$$\Lambda(P, s) = \pi^{-s}\Gamma(s)\, Z(P, s) .$$

Alors

$$w \cdot \Lambda_E(s) = 2^{r_1 - 1} \cdot n R \sum_{j=1}^{h} \int_{x\in[0,1]^r} \Lambda\left(P^0_{j,x}, \frac{ns}{2}\right) dx .$$

Remarque. Il serait intéressant de faire le calcul précédent dans un cas plus général où l'on considère un quasi-caractère ω de $\mathbf{A}^\times$ quelconque. Ainsi $\omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}$ correspond à un caractère de Hecke sur le groupe des idéaux de E (cf. [4], chap. 8, § 3, p. 156) et la difficulté est alors de calculer l'intégrale toroïdale aux places finies sur lesquelles le quasi-caractère $\omega \circ N_{E/}$ se ramifie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL, A. *Linear algebraic groups.* Benjamin (1969).
[2] BOREVITCH, Z. I. et I. R. CHAFAREVITCH. *Théorie des Nombres.* Gauthiers Villars (1967).
[3] BOURBAKI, N. *Algèbre, chapitres V, VII.* Masson (1981).
[4] GOLDSTEIN, L. J. *Analytic number theory.* Prentice Hall (1971).