prolongement analytique des séries d'Eisenstein

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

$$\begin{aligned}
&\int_{k^\times\backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx)\cdot \sum_{\xi\in V(k)-\{0\}} \varphi(\xi tx) d\mu(t) \\
&= \sum_{\gamma\in P(k)\backslash G(k)} \int_{\mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx)\, \varphi(\mathrm{et}\ \gamma x) d\mu(t) \\
&= E(\varphi, x, \omega)\,.
\end{aligned}$$

Chapitre IV

Le prolongement analytique des séries d'Eisenstein

Dans la suite, k désigne un corps global, E une extension de dimension n sur k et $V(k)$ l'espace vectoriel sur k sous-jacent à E.

1. La formule de Poisson

Soit χ un caractère de $\mathbf{A}_k$ non trivial, trivial sur k et soit (x, y) la formule bilinéaire symétrique sur $V(\mathbf{A}_k)$ non dégénérée définie par

$$(x, y) = Tr(xy)\,,$$

où Tr désigne la trace absolue $Tr_{E/k}$; alors on peut identifier $V(\mathbf{A}_k)$ ave son dual topologique par l'isomorphisme qui a un élément x de $V(\mathbf{A}$ associe le caractère $\chi(x, y)$ de $V(\mathbf{A}_k)$.

Soit α la mesure de Tamagawa de $\mathbf{A}_E$ pour laquelle le quotient $E\backslash\mathbf{A}$ est de mesure 1, avec l'identification précédente; la transformée de Fourie d'une fonction φ de $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$ est définie par

$$\hat{\varphi}(y) = \int_{V(\mathbf{A}_k)} \varphi(x)\, \overline{\chi(x, y)}\, d\alpha(x), \qquad \text{pour} \qquad y \in V(\mathbf{A}_k)\,,$$

et la formule de Poisson pour le sous-groupe discret à quotient compac $V(k)$ dans $V(\mathbf{A}_k)$ s'écrit

$$\sum_{x\in V(k)} \varphi(x) = \sum_{y\in V(k)} \hat{\varphi}(y) \qquad \text{pour} \qquad \varphi \in \mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))\,,$$

l'orthogonal de $V(k)$ s'identifiant à $V(k)$.

PROPOSITION 8. *Soit* φ *une fonction de* $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$; *on pose*

$$\theta(\varphi, x, t) = \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi t x)$$

pour $x \in G(\mathbf{A}_k)$ *et* $t \in \mathbf{A}_k^\times$; *alors*

$$\theta(\varphi, x, t) + \varphi(0) = |\det tx|_{\mathbf{A}_k}^{-1} \left(\theta(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, t^{-1}) + \hat{\varphi}(0)\right),$$

où $\check{x}$ *désigne la matrice adjointe de la matrice* x *pour la forme bilinéaire* (a, b):

$$(ax, b) = (a, b, \check{x}), \qquad a, b \in V(\mathbf{A}_k).$$

Démonstration. On pose

$$\psi(\xi) = \varphi(\xi t x) \quad \text{pour} \quad \xi \in V(\mathbf{A}_k);$$

alors
$$\hat{\psi}(\eta) = \int_{V(\mathbf{A}_k)} \varphi(\xi t x) \overline{\chi(\xi, \eta)}\, d\alpha(\xi).$$

Si on fait le changement de variables $\xi \mapsto s = \xi t$, on obtient

$$\hat{\psi}(\eta) = |t|_{\mathbf{A}_k}^{-n} \cdot \int_{V(\mathbf{A}_k)} \varphi(sx) \overline{\chi(st^{-1}, \eta)}\, d\alpha(s).$$

Posons encore $z = sx$; alors

$$\hat{\psi}(\eta) = |\det tx|_{\mathbf{A}_k}^{-1} \cdot \int_{V(\mathbf{A}_k)} \varphi(z) \overline{\chi(zx^{-1}t^{-1}, \eta)} d\alpha(z)$$
$$= |\det tx|_{\mathbf{A}_k}^{-1} \cdot \int_{V(\mathbf{A}_k)} \varphi(z) \overline{\chi(z, \eta t^{-1} \check{x}^{-1})} d\alpha(z)$$
$$= |\det tx|_{\mathbf{A}_k}^{1} \cdot \hat{\varphi}(\eta t^{\ 1} \check{x}^{\ 1}).$$

Appliquons la formule de Poisson; on obtient l'équivalence des égalités suivantes:

$$\sum_{\xi \in V(k)} \psi(\xi) = \sum_{\eta \in V(k)} \hat{\psi}(\eta),$$
$$\theta(\varphi, x, t) + \varphi(0) = |\det tx|_{\mathbf{A}_k}^{-1} \cdot \sum_{\eta \in V(k)} \hat{\varphi}(\eta t^{-1} \check{x}^{-1}),$$
$$\theta(\varphi, x, t) + \varphi(0) = |\det tx|_{\mathbf{A}_k}^{-1} \left(\theta(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, t^{-1}) + \hat{\varphi}(0)\right).$$

2. Le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle des séries d'Eisenstein.

Définissons une relation d'équivalence sur les quasi-caractères de $\mathbf{A}_k^\times$: on dira que deux quasi-caractères sont équivalents s'ils coïncident sur les idèles $\mathbf{A}_k^1$ de module un. Sachant qu'un quasi-caractère trivial sur $\mathbf{A}_k^1$ est de la forme $|a|^s$, $s \in \mathbf{C}$, une classe d'équivalence est constituée de tous les quasi-caractères de la forme $\omega(a) = \omega_0(a) \cdot |a|^s$, où ω_0 est un caractère de $\mathbf{A}_k^\times$, représentant fixé de la classe et s un nombre complexe déterminé de manière unique par ω. On a donc paramétrisé une classe d'équivalence de quasi-caractères par une variable complexe s et on peut identifier cette classe avec un plan si k *est de caractéristique nulle et avec un cylindre si* k est de caractéristique p.

Choisissons une mesure de Haar sur $\mathbf{A}_k^\times$; sur le groupe compact $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^1$, on choisit la mesure de Haar μ_1 telle que $\mu_1(k^\times \backslash \mathbf{A}_k^1) = 1$.

Soit N le groupe tel que l'on ait la décomposition

$$k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times = k^\times \backslash \mathbf{A}_k^1 \times N;$$

on définit une mesure μ_2 sur N par

$$d\mu_2(n) = \frac{dn}{n} \quad \text{si} \quad N = \mathbf{R}_+^\times,$$

$$\text{et} \quad \mu_2(\{1\}) = 1 \quad \text{si} \quad N \text{ est isomorphe à } \mathbf{Z}.$$

Sur le groupe $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$, on considère la mesure produit $\mu = \mu_1 \times \mu_2$. Enfin, sur $\mathbf{A}_k^\times$, on choisit la mesure μ dont l'image dans le quotient $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$ est la mesure définie précédemment. On sait d'après le chapitre précédent que la série $E(\varphi, x, \omega)$ est holomorphe sur l'ensemble des quasi-caractères ω de la forme $\omega_0(a) \cdot |a|^s$ avec $\operatorname{Re} s > 1$. Le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle des séries d'Eisenstein sont donnés par la

Proposition 9. *On peut prolonger analytiquement les séries* $E(\varphi, x, \omega)$ *à l'ensemble de tous les quasi-caractères. Soit* $X_n(\mathbf{A}_k^1)$ *le groupe des quasi-caractères d'ordre* n *de* $\mathbf{A}_k^1$; *la fonction prolongée est une fonction méromorphe dans* $\mathbf{C}$ *et holomorphe sauf si* $\omega \in x_n(\mathbf{A}_k^1)$ *où si* $\omega(a) = \omega_0(a) \cdot |a|$ *avec* $\omega_0 \in x_n(\mathbf{A}_k^1)$; *elle admet respectivement en ces points un pôle simple de résidu* $\frac{1}{n} \rho\varphi(0)\omega(\det x)$ *et un pôle simple de résidu* $-\frac{1}{n} \rho\hat{\varphi}(0)\hat{\omega}^{-1}(\det x)$ *avec*

$$\rho = 1 \qquad si \quad k \quad de\ caractéristique \quad 0\,,$$
$$\rho = (\log Q)^{-1} \qquad si \qquad N = \{Q^{\nu}\}_{\nu\in\mathbf{Z}}\,.$$

Enfin la fonction prolongée vérifie l'équation

$$E(\varphi, x, \omega) = E(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, \hat{\omega})\,,$$

où $\hat{\omega}$ *est le quasi-caractère de* $\mathbf{A}_k^{\times}$ *défini par*

$$\hat{\omega}(t) = |\, t\,| \cdot \omega^{-1}(t)\,.$$

Démonstration. On décompose la série $E(\varphi, x, \omega)$. Les idèles de module un $k^{\times}\backslash\mathbf{A}_k^1$ étant de mesure non nulle, on ne peut pas écrire $E(\varphi, x, \omega)$ comme la somme d'une intégrale sur les idèles $|\, t\,| \leqslant 1$ et d'une intégrale sur les idèles $|\, t\,| \geqslant 1$. Il faut donc choisir sur $\mathbf{R}_+^{\times}$, deux fonctions continues F_0 et F_1 avec les propriétés suivantes:

(i) $F_0 \geqslant 0\,, \quad F_1 \geqslant 0\,, \quad F_0 + F_1 = 1\,.$

(ii) Il existe un intervalle compact $[t_0, t_1]$ dans $\mathbf{R}_+^{\times}$ tel que

$$F_0(t) = 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 < t < t_0\,,$$
$$F_1(t) = 0 \qquad \text{pour} \qquad t > t_1\,.$$

On demande de plus que

$$F_0(t) = F_1(t^{-1}) \qquad \text{pour tout } t\,;$$

pour cela, on choisit pour F_1 une fonction continue définie sur $t \geqslant 1$ avec

$$F_1(1) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad F_1(t) = 0 \qquad \text{pour} \qquad t \geqslant t_1 > 1.$$

Enfin, on pose

$$F_1(t) = 1 - F_1(t^{-1}) \qquad \text{pour} \qquad 0 < t < 1$$

et

$$F_0 = 1 - F_1\,.$$

Alors la série $E(\varphi, x, \omega)$ peut s'écrire comme une somme $E = E_0 + E_1$ avec

$$E_0(\varphi, x, \omega) = \int_{k^{\times}\backslash\mathbf{A}_k^{\times}} \omega(\det tx)\, \theta(\varphi, x, t)\, F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t)$$

et

$$E_1(\varphi, x, \omega) = \int_{k^{\times}\backslash\mathbf{A}_k^{\times}} \omega(\det x)\, \theta(\varphi, x, t)\, F_1(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t)\,.$$

L'intégrale $E_0(\varphi, x, \omega)$ est une fonction entière définie sur l'ensemble de tous les quasi-caractères.

Choisissons $B > 1$. Pour $\sigma \in \mathbf{R}$, $\sigma \leqslant B$, $t \in \mathbf{R}_+^\times$, on a

$$t^{n\sigma} F_0(t) \leqslant t_0^{n(\sigma - B)} \cdot t^{nB} .$$

Ceci donne la majoration suivante:

$$\int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} |\det tx|_{\mathbf{A}}^{\sigma_{k}} \cdot |\theta(\varphi, x, t)| \cdot F_0(|t|_{\mathbf{A}_k})\, d\mu(t)$$

$$\leqslant t_0^{n(\sigma - B)} \cdot \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} |\det x|^\sigma \cdot |t|_{\mathbf{A}_k}^{nB} \cdot |\theta(\varphi, x, t)|\, d\mu(t) ,$$

intégrale qui converge d'après le lemme de la proposition 6 du chapitre III. Ainsi, on obtient la convergence uniforme de $E_0(\varphi, x, \omega)$ sur tout compact de $\mathbf{C}$ et l'application $\omega \to E_0(\varphi, x, \omega)$ est holomorphe.

On exprime à présent l'intégrale E_1 en fonction de l'intégrale E_0 en utilisant la formule de Poisson. Pour cela, on fait le changement de variables $t \mapsto t^{-1}$. Ce changement transforme la mesure de Haar μ en une mesure de Haar $c\mu$, où $c^2 = 1$ puisque c'est un homéomorphisme d'ordre 2 de $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$, donc $c = 1$ et on obtient

$$\begin{aligned} E_1(\varphi, x, \omega) &= \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det t^{-1}x) \cdot \theta(\varphi, x, t^{-1}) F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t) \\ &= E'_0(\varphi, x, \omega) + R_1(\varphi, x, \omega) - R_2(\varphi, x, \omega) , \end{aligned}$$

avec

$$E'_0(\varphi, x, \omega) = \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det t^{-1}x) \cdot |\det t^{-1}x|_{\mathbf{A}_k}^{-1}\, \theta(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, t) F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t) ,$$

$$R_1(\varphi, x, \omega) = \hat{\varphi}(0) \cdot \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det t^{-1}x) \cdot |\det t^{-1}x|_{\mathbf{A}_k}^{-1} \cdot F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t) ,$$

$$R_2(\varphi, x, \omega) = \varphi(0) \cdot \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det t^{-1}x)\, F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t) .$$

Soit T la matrice de $G(\mathbf{A}_k)$ telle qu'on ait l'égalité

$$(a, b) = (aT|b) ,$$

où $(a|b)$ désigne le produit scalaire euclidien $a \cdot {}^t b$ sur $V(\mathbf{A}_k)$; les matrices x et $\check{x}$ sont reliées par la relation

$${}^t T^t x\, {}^t T^{-1} = \check{x} ,$$

de sorte que les déterminants de x et $\check{x}$ sont égaux et

$$E'_0(\varphi, x, \omega)$$
$$= \int_{k^\times\backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega^{-1}(\det t\check{x}^{-1}) \cdot |\det t\check{x}^{-1}|_{\mathbf{A}_k} \cdot \theta(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, t) F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t)$$

Soit $\hat{\omega}$ le quasi-caractère de $\mathbf{A}_k^\times$ défini par

$$\hat{\omega}(t) = |t| \cdot \omega^{-1}(t);$$

alors
$$E'_0(\varphi, x, \omega) = E_0(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, \hat{\omega}).$$

D'autre part, si le quasi-caractère ω s'écrit

$$\omega(t) = \omega_0(t) \cdot |t|^s,$$

où ω_0 est un caractère fixé, représentant de la classe de ω, les intégrales R_1 et R_2 se réécrivent

$$R_1(\varphi, x, \omega) = \hat{\varphi}(0) \cdot \int_{k^\times\backslash \mathbf{A}_k^\times} \hat{\omega}(\det tx^{-1}) F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t)$$
$$= \hat{\varphi}(0)\hat{\omega}^{-1}(\det x) \int_{k^\times\backslash \mathbf{A}_k^1} \omega_0^{-1}(t^n) d\mu_1(t) \cdot \int_N |t|_{\mathbf{A}_k}^{n(1-s)} \cdot F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu_2(|t|)$$

et

$$R_2(\varphi, x, \omega)$$
$$= \varphi(0)\, \omega(\det x) \int_{k^\times\backslash \mathbf{A}_k^1} \omega_0^{-1}(t^n) d\mu_1(t) \cdot \int_N |t|_{\mathbf{A}_k}^{-ns} \cdot F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu_2(|t|).$$

L'intégrale $\int_{k^\times\backslash \mathbf{A}_k^1} \omega_0^{-n}(t) d\mu(t)$ vaut 1 ou 0 suivant que ω_0^n est trivial ou non sur $\mathbf{A}_k^1$. Notons $\delta(\omega_0, n)$ ce facteur, alors

$$R_1(\varphi, x, \omega) = \hat{\varphi}(0) \cdot \hat{\omega}^{-1}(\det x) \delta(\omega_0, n) \cdot \int_N |t|_{\mathbf{A}_k}^{n(1-s)} \cdot F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu_2(|t|)$$

et

$$R_2(\varphi, x, \omega) = \varphi(0)\, \omega(\det x)\, \delta(\omega_0, n) \int_N |t|_{\mathbf{A}_k}^{-ns} \cdot F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu_2(|t|).$$

Si on note

$$\lambda(s) = \int_N |t|^s F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu_2(t),$$

on obtient

$$R_1(\varphi, x, \omega) = \hat{\varphi}(0)\, \hat{\omega}^{-1}(\det x)\, \delta(\omega_0, n)\, \lambda\big(n(1-s)\big)$$

et

$$R_2(\varphi, x, \omega) = \varphi(0)\, \omega(\det x)\, \delta(\omega_0, n)\, \lambda(-ns)\,.$$

En utilisant [6] lemme 6, § 5, chap. VII, p. 121, il s'ensuit que $E(\varphi, x, \omega)$ est une fonction holomorphe sur l'ensemble de tous les quasi-caractères sauf en $\omega(a) = \omega_0(a)$ et $\omega(a) = \omega_0(a) \cdot |\, a\, |$ lorsque ω_0 parcourt l'ensemble $X_n(\mathbf{A}_k^1)$ des quasi-caractères d'ordre n sur $\mathbf{A}_k^1$; en ces points, la fonction $E(\varphi, x, \omega)$ admet respectivement un pôle simple de résidu $\frac{1}{n}\, \rho\varphi(0)\, \omega(\det x)$ et un pôle simple de résidu $-\frac{1}{n}\, \rho\hat{\varphi}(0)\, \hat{\omega}^{-1}(\det x)$ avec

$$\rho = 1 \quad \text{si} \quad k \text{ de caractéristique } 0 \text{ et}$$

$$\rho = (\log Q)^{-1} \quad \text{si} \quad k \text{ de caractéristique } p \text{ et } N = \{Q^\nu\}_{\nu \in \mathbf{Z}}\,.$$

Enfin, en ce qui concerne l'équation fonctionnelle vérifiée par la série $E(\varphi, x, \omega)$, on a

$$\begin{aligned} E(\varphi, x, \omega) &= E_0(\varphi, x, \omega) + E_1(\varphi, x, \omega) \\ &= E_0(\varphi, x, \omega) + E_0(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, \hat{\omega}) + \delta(\omega_0, n)[\hat{\varphi}(0)\hat{\omega}^{-1}(\det x)\lambda\big(n(1-s)\big) \\ &\qquad + \varphi(0)\omega(\det x)\lambda(ns)]\,, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} E(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, \hat{\omega}) = E_0(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, \hat{\omega}) + E_0(\varphi_-, x, \omega) + \delta(\omega_0, n)[\varphi(0)\omega(\det x)\lambda(ns) \\ + \hat{\varphi}(0)\hat{\omega}^{-1}(\det x)\lambda\big(n(1-s)\big)]\,, \end{aligned}$$

où la fonction φ_- est définie pour $\xi \in V(\mathbf{A}_k)$ par

$$\varphi_-(\xi) = \varphi(-\xi)\,.$$

Comme $E_0(\varphi_-, x, \omega) = E_0(\varphi, x, \omega)$, on obtient pour équation fonctionnell vérifiée par les séries d'Eisenstein

$$E(\varphi, x, \omega) = E(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, \hat{\omega})\,.$$