F) Sur la série singulière F

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

F) SUR LA SÉRIE SINGULIÈRE F

Dans le présent travail, la priorité est revenue à F^*, selon la notation d'Igusa. Mais, chez Igusa (Forms of higher degree) ou chez Lachaud (chapitre 1), la préférence est donnée à la fonction

$$F(\nu) = \widehat{F^*}(-\nu),$$

appelée série singulière globale et qui peut être définie directement.

Remarquons que si F est intégrable et continue alors on a $F^* = \hat{F}$, d'après la formule d'inversion de Fourier.

Les considérations du lemme 4.5 i) et ii) sont valables dans $\mathbf{Q}_p$ puisque le théorème des fonctions implicites est vrai pour des fonctions analytiques sur tout corps valué complet.

Ainsi obtient-on localement, c'est-à-dire dans $\mathbf{R}$ et dans chaque $\mathbf{Q}_p$, la définition d'une mesure $dw_{\infty,\mu}$ ou $dw_{p,\mu}$, sur l'ouvert des points non singuliers de $V_\infty(\mu)$ ou $V_p(\mu)$ (dont les définitions sont évidentes!), telle que pour toute fonction φ à support compact inclus dans l'ouvert des points non singuliers du système f dans $\mathbf{R}^n$ ou dans $\mathbf{Q}_p^n$, on ait les formules de désintégration de mesures suivantes:

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)dx = \int_{\mathbf{R}^r} \left[\int \varphi dw_{\infty,\mu}\right] d\mu$$

et

$$\int_{\mathbf{Q}^n} \varphi(y)dy = \int_{\mathbf{Q}_p^r} \left[\int \varphi dw_{p,\mu}\right] d\mu\,.$$

Soit maintenant φ, une fonction de Schwarz Bruhat sur $\mathbf{A}^n$, décomposable et telle que φ_∞ et chaque φ_p aient un support compact inclus respectivement dans l'ouvert des points non singuliers de f dans $\mathbf{R}^n$ ou dans $\mathbf{Q}_p^n$; on définit les séries singulières locales

$$F_\infty(\mu_\infty) = \int \varphi_\infty\, dw_{\infty,\mu_\infty} \quad \text{et} \quad F_p(\mu_p) = \int \varphi_p\, dw_{p,\mu_p}\,.$$

Enfin, si le produit infini ci-dessous converge, on obtient la série singulière globale:

$$F(\mu) = F_\infty(\mu_\infty)\prod_p F_p(\mu_p)\,.$$

Revenons à une fonction φ locale (i.e: définie sur $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{Q}_p^n$). Si φ est à support compact quelconque celui-ci peut contenir des points singuliers du système f dans $\mathbf{R}^n$ ou dans $\mathbf{Q}_p^n$ selon le cas. La définition de l'intégrale « $\int \varphi dw_\mu$ » pose alors un problème de convergence (Birch parle d'intégrale de Riemann généralisée) et *a fortiori* si φ n'est pas à support compact (ce dernier cas concerne seulement $\mathbf{R}$ et φ fonction de Schwartz). Enfin, même en cas de convergence, la continuité de la fonction locale F_∞ ou F_p reste à prouver.

Igusa (« Forms of higher degree », p. 76 à 79) montre que la fonction F_∞ existe et est continue pour $\mu \in \mathbf{R}^*$, dans le cas d'une forme f quelconque ($r=1$). Le cas $\mu = 0$ demande des hypothèses complémentaires sur f.

Birch montre (essentiellement, ceci a déjà été dit dans la remarque qui suit le lemme 4.6, grâce à l'inégalité (5.1) qui dit que codim V^* est grande) dans son lemme 6.1 surtout, que la fonction F_∞ existe et est continue pour tout $\mu \in \mathbf{R}^r$ lorsque la fonction φ_∞ est $1_{P\mathscr{B}}$ (le résultat serait identique pour $\varphi_\infty = \theta * 1_{P\mathscr{B}}$).

Il reste à s'assurer de la convergence du produit infini $\prod\limits_p F_p$ (mais sous les hypothèses de Birch c'est vrai) pour obtenir la série singulière globale.

Le cas le plus étudié (Igusa, Lachaud) est celui des formes ($r=1$) fortement non dégénérées (i.e: $V^* = \{0\}$) où de très beaux résultats ont été obtenus par Igusa selon des méthodes qui n'ont rien à voir avec la méthode du cercle. Mais il paraît difficile de terminer ce travail sans avoir signalé l'existence, sous les hypothèses de Birch (i.e: l'inégalité (5.1)), d'une série singulière globale F continue et intégrable (donc on a $F^* = \hat{F}$).

Enfin, on peut raisonnablement prévoir, en suivant encore Igusa, une formule de Poisson globale:

$$\sum_{\xi \in \mathbf{Q}^r} F^*(\xi) = \sum_{\mu \in \mathbf{Q}^r} F(\mu)\,.$$

BIBLIOGRAPHIE

BIRCH, B. J. Forms in many variables. *Proc. Royal Soc. A*, *265* (1962), 245-263.

DAVENPORT, H. *Analytic Methods for diophantine equations and diophantine inequalities.* Ann. Arbor, 1962.

—— Cubic forms in 32 variables. *Phil. Trans. Royal Soc. A 251* (1959), 193-232.

—— Cubic forms in 16 variables. *Proc. Royal Soc. A*, *272* (1963), 285-303.

GODEMENT, R. *Adèles et idèles.* Cours I.H.P. Paris, 1965/1966.