A) Sur les hypothèses (H1) et (H2)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

§ 5. Exemples d'applications

A) Sur les hypothèses (H1) et (H2)

La justification de l'hypothèse (H1) provient de l'emploi de l'inégalité de Weyl et de ses généralisations pour majorer des sommes trigonométriques du type $S(\alpha)$. Il semble que, *pour de telles sommes*, ce soit la seule méthode efficace actuellement connue. L'adjectif « efficace » étant un exemple d'euphémisme.

Le but de ce travail n'étant pas de recopier Birch ou Davenport, mieux valait se situer en aval, c'est-à-dire partir de l'hypothèse (H1), quitte à indiquer ici la méthode qui y conduit, sans démonstrations mais avec des références bibliographiques qui sont les suivantes :

Birch, « Forms in many variables », paragraphe 2, lemmes 2.1 à 2.5.

Davenport, « Cubic forms in 32 variables », paragraphes 3 et 4.
« Cubic forms in 16 variables », paragraphes 4 et 5.
« Analytic Methods... », paragraphes 3 et 13.

Pour le reste, il faut d'abord remarquer que la démonstration de l'inégalité de Weyl utilise une succession de différences finies (autant que le degré d des formes f_i) portant sur les polynômes présents dans l'exposant de e (les polynômes f_i et g en ce qui nous concerne) d'où un résultat *indépendant* du polynôme g puisque son degré est inférieur strictement à d. Ainsi la disparition du polynôme g dans l'hypothèse (H1), qui ne présente aucun inconvénient pour les paragraphes 1 à 4 du présent travail, n'a pas d'intérêt tant que la méthode de Weyl demeurera la seule qui puisse justifier l'hypothèse (H1).

L'inégalité de Weyl une fois obtenue, on utilise un résultat de géométrie des nombres (Birch lemme 2.3, Davenport « 32 variables » lemme (3.3) « 16 variables » lemme 8) avant d'aboutir à un *lemme à trois possibilités* (Birch lemme 2.5, Davenport « Analytic methods », lemme 32, Schmidt « Simultaneous rational zeros... », lemme 3).

La première possibilité est une bonne majoration du module de $S(\alpha)$ du type P^{n-k} où $k > 0$ est un paramètre.

La seconde possibilité est une bonne approximation rationnelle de α, précisément celle de l'hypothèse (H1) ii), associée à un second paramètre $\Delta > 0$.

La troisième possibilité est la mauvaise : celle qui ne garantit aucune des deux précédentes. Toutefois elle exprime une condition (compliquée) qui ne concerne pas α mais seulement les formes f_i.

Ainsi, chez tous les auteurs la règle est-elle la même: attribuer aux formes f_i une propriété T, plus ou moins laide, qui soit suffisante pour exclure la troisième possibilité et donc garantir l'hypothèse (H1) qui n'est autre que l'union des deux premières possibilités (poser $k = \Delta\Omega$)!

Mais ce n'est pas suffisant car pour exploiter convenablement, par la méthode du cercle de Hardy et Littlewood, l'hypothèse (H1) il faut disposer d'un bon accord entre les paramètres k et Δ, plus précisément de l'hypothèse (H2):

$$\frac{k}{\Delta} = \Omega > r + 1 .$$

Ainsi équipé le système f peut affronter la « machinerie » de la méthode du cercle dont le présent travail donne un exposé adélique. On obtient ainsi la formule asymptotique de la Proposition 4.1 (Birch lemme 5.5, Davenport « 16 variables » lemme 16, etc.).

Encore doit-on s'assurer que le terme principal de cette formule asymptotique n'est pas nul. C'est la raison des hypothèses (H3) et (H4). Hélas la vérification de (H3) est un problème difficile et tout simplement non résolu dès qu'on quitte les cas particuliers.

En résumé, pour obtenir des exemples d'application, il faut atteindre deux objectifs:

1° Trouver une propriété T du système f qui implique (H1) et aussi (H2).

2° Vérifier (H3) et éventuellement (H4).

B) Sur le travail de Birch

Ce dernier consacre son paragraphe 3 à la définition d'une propriété T en termes de géométrie algébrique.

Soit l'application polynomiale $f: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^r$ (on prend ici le corps $\mathbf{C}$ parce qu'il est algébriquement clos). Birch note

$$V^* = \{x \in \mathbf{C}^n \mid \operatorname{rang}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right) < r\}$$

la variété des points singuliers de f (rappel: $r \geqslant n$).

Il obtient ainsi la propriété T suivante:

$$n - \dim V^* > 2^{d-1} r(d-1)\Omega$$