

## 2. Les foncteurs E et F

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

2. LES FONCTEURS  $E$  ET  $F$ 

2.1. Soit  $f: X \rightarrow Y$  une application continue entre espaces localement compacts telle que le foncteur  $f_!$  soit de dimension cohomologique finie. Soit  $\mathcal{K}$  un faisceau sur  $X$ ,  $f_!$ -mou et plat.

2.2. La composition des foncteurs

$$Sh(X) \times Sh(Y) \xrightarrow{f_!^{\mathcal{K}}} \times_{1_{Sh(Y)}} Sh(Y) \times Sh(Y) \xrightarrow{\mathcal{H}om} Sh(Y)$$

définit un bifoncteur

$$E(-; -): Sh(X)^0 \times Sh(Y) \rightarrow Sh(Y)$$

2.3. Soit  $\mathcal{A}$  un faisceau sur  $X$  et  $\mathcal{B}$  un faisceau sur  $Y$ . Le foncteur  $E(\mathcal{A}; -): Sh(Y) \rightarrow Sh(Y)$  est exact gauche et commute aux produits directs. Le foncteur  $E(-; \mathcal{B}): Sh(X)^0 \rightarrow Sh(Y)$  est exact gauche et transforme les sommes directes en produits directs.

En effet cela résulte des propriétés analogues du foncteur  $\mathcal{H}om$ , de la proposition 1.7 et de ([Gr], th. 2.15).

2.4. La composition des foncteurs

$$Sh(X) \times Sh(Y) \xrightarrow{1_{Sh(X)}} \times_{f_!^{\mathcal{K}}} Sh(X) \times Sh(X) \xrightarrow{\mathcal{H}om} Sh(X) \xrightarrow{f_*} Sh(Y)$$

définit un bifoncteur

$$F(-; -): Sh(X)^0 \times Sh(Y) \rightarrow Sh(Y)$$

2.5. Soit  $\mathcal{A}$  un faisceau sur  $X$  et  $\mathcal{B}$  un faisceau sur  $Y$ . Le foncteur  $F(\mathcal{A}; -): Sh(Y) \rightarrow Sh(Y)$  est exact gauche et commute aux produits directs.

Le foncteur  $F(-; \mathcal{B}): Sh(X)^0 \rightarrow Sh(Y)$  est exact gauche et transforme les sommes directes en produits directs. En effet cela résulte des propriétés analogues des foncteurs  $\mathcal{H}om$  et  $f_*$  et du N° 1.8.

2.6. THÉORÈME. *Il existe un isomorphisme de bifoncteurs*

$$\lambda: E(-; -) \rightarrow F(-; -).$$

2.7. La construction du morphisme  $\lambda$  et la démonstration du théorème fera l'objet du paragraphe 3.

2.8. COROLLAIRE. *Le foncteur  $f_{\mathcal{X}}^! : Sh(Y) \rightarrow Sh(X)$  est adjoint à droite au foncteur  $f_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}} : Sh(X) \rightarrow Sh(Y)$ .*

*Démonstration.* En effet prenons les sections globales dans l'isomorphisme du théorème 2.6. On obtient ainsi un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{Sh(Y)}(f_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}}(\mathcal{A}); \mathcal{B}) = \mathrm{Hom}_{Sh(X)}(\mathcal{A}; f_{\mathcal{X}}^!(\mathcal{B}))$$

2.9. COROLLAIRE. *Le foncteur  $f_{\mathcal{X}}^! : Sh(Y) \rightarrow Sh(X)$  se restreint à un foncteur  $f_{\mathcal{X}}^! : \mathrm{Inj}(Y) \rightarrow \mathrm{Inj}(X)$ .*

*Démonstration.* Soit  $0 \rightarrow \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'' \rightarrow 0$  une suite exacte de faisceaux sur  $X$  et soit  $\mathcal{I}$  un faisceau injectif sur  $Y$ . En appliquant successivement à cette suite les foncteurs exacts  $f_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}}$  et  $\mathrm{Hom}_{Sh(Y)}(-; \mathcal{I})$ , puis en utilisant l'isomorphisme du corollaire 2.8, on obtient une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{Sh(X)}(\mathcal{A}''; f_{\mathcal{X}}^!(\mathcal{I})) &\rightarrow \mathrm{Hom}_{Sh(X)}(\mathcal{A}; f_{\mathcal{X}}^!(\mathcal{I})) \\ &\rightarrow \mathrm{Hom}_{Sh(X)}(\mathcal{A}'; f_{\mathcal{X}}^!(\mathcal{I})) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que le faisceau  $f_{\mathcal{X}}^!(\mathcal{I})$  est injectif.

### 3. L'ISOMORPHISME $\lambda$

3.1. On reprend les hypothèses du N° 2.1. Le résultat suivant permet de simplifier la construction de  $\lambda$  en passant d'une situation locale à une situation globale.

LEMME. *Soit  $W \in \mathrm{Ouv}(Y)$ : posons  $W' = f^{-1}(W)$  et considérons le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} W' & \xrightarrow{j'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ W & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$