§4. Interprétation de (K)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1984)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

complète, c'est-à-dire compacte pour la topologie transcendante. En triangulant, on peut trouver un voisinage tubulaire U du fermé $\Sigma := (\tilde{X} - X) \cup \bar{\Delta}$, de sorte que $W = X - \Delta = \tilde{X} - \Sigma$ se rétracte par déformations sur $\tilde{X} - U$. Par compacité, l'homologie de $\tilde{X} - U$ (et donc celle de W) est de type fini [5, Chap. VIII, cor. 1.4].

Soit $x \in W$. Notons $\rho : \pi_1(W, x) \to H_1(W)$ la projection canonique et N le sous-groupe $\mathrm{Ker}(\psi' \circ \rho)$ invariant d'indice m dans $\pi_1(W, x)$. A N correspond un revêtement topologique galoisien non ramifié à m feuillets $p : Z \to W$, tel que $p_* \pi_1(Z, y) = N$ pour tout $y \in p^{-1}(x)$. Remarquons que le groupe $\mathrm{Aut}_W(Z) \simeq \pi_1(W, x)/p_* \pi_1(Z, y)$ est abélien, car par passage au quotient $\psi' \circ \rho$ devient une injection $\psi'' : \mathrm{Aut}_W(Z) \hookrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

C'est maintenant qu'on utilise le théorème d'existence de Riemann généralisé pour savoir qu'on peut munir Z d'une structure de variété algébrique normale de sorte que p soit un morphisme algébrique fini. Notons $L = \mathbf{C}(Z)$. La paire (Z, p) est la normalisation de W dans L, de sorte que, si (Y, ν) est celle de X dans L, par unicité, on peut supposer $Z \subset Y$ et $p = \nu|_Z$.

On veut montrer que l'extension L/K est galoisienne. Pour cela, on choisit une extension galoisienne L'/K contenant L et on considère la normalisation (Y', μ) de Y dans L'. Quitte à agrandir Δ, on peut supposer qu'il contient la ramification de $\nu' := \nu \circ \mu$. Notons $Z' = Y' - \nu'^{-1}(\Delta)$. En utilisant les suites (6) correspondant à ν, ν' et μ, on obtient la suite exacte

$$1 \to \mathrm{Aut}_Z(Z') \to \mathrm{Aut}_W(Z') \to \mathrm{Aut}_W(Z) \to 1 .$$

Par l'isomorphisme du lemme 3.2, l'inclusion de $\mathrm{Aut}_Z(Z')$ dans $\mathrm{Aut}_W(Z')$ correspond à celle de $\mathrm{Gal}(L'/L)$ dans $\mathrm{Gal}(L'/K)$, ce qui montre que ce dernier sous-groupe est invariant et que l'extension L/K est galoisienne.

Soit L_0 l'unique sous-corps de $\bar{K}$ isomorphe à L. On a les identifications $\mathrm{Gal}(L_0/K) = \mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Aut}_W(Z)$, la première étant induite par n'importe quel isomorphisme $L_0 \simeq L$, mais n'en dépendant pas puisque les groupes sont abéliens. On peut donc définir $\varphi \in \chi(K)$ comme la composition de la projection $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(L_0/K)$ suivie de $\psi'' : \mathrm{Aut}_W(Z) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Par construction, $F(\varphi) = \psi$. □

§ 4. Interprétation de $\chi(K)$

Soit K un corps de fonctions complexes et soit X une variété algébrique lisse avec corps des fonctions $\mathbf{C}(X) \simeq K$. A partir du calcul du § 3, on interprète $\chi(K)$ en terme d'invariants usuels de X : le groupe des diviseurs

(algébriques) $\mathrm{Div}(X)$ de X et les premiers groupes de cohomologie de X muni de la topologie transcendante.

THÉORÈME 4.1. *Soit K un corps de fonctions complexes et soit X une variété algébrique lisse avec $\mathbf{C}(X) \simeq K$. Alors on a la suite exacte*

$$0 \to H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \chi(K) \to \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{c} H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

où l'homomorphisme c est induit par la première classe de Chern.

Démonstration. En identifiant $\mathbf{C}(X)$ à K, on a

$$\chi(K) = \varinjlim_{D \in \mathscr{V}(X)} H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

par le théorème 3.1.

1) *Calcul de $H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$:* Soit $D \in \mathscr{V}(X)$. On veut expliciter le groupe $H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}(H_1(X-D), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. On part de la suite exacte d'homologie de $(X, X-D)$:

$$(9) \qquad H_2(X) \to H_2(X, X-D) \to H_1(X-D) \to H_1(X) \to H_1(X, X-D).$$

Comme D est de codimension (réelle) 2 dans X, on a immédiatement $H_1(X, X-D) = 0$, car tout lacet dans X peut être poussé dans $X - D$. Notons D_s la partie singulière et $D_r = D - D_s$ la partie régulière de D. Comme D_s est de codimension au moins 4 dans X, on a aussi $H_2(X, X-D) \simeq H_2(X-D_s, X-D)$. On va calculer ce dernier groupe en utilisant l'isomorphisme de Thom.

Notons $2n$ la dimension de X. On a deux isomorphismes de dualité de Poincaré exprimant la cohomologie à supports compacts de D_r [5, Chap. VIII, prop. 7.14]

$$H_c^{2n-2}(D_r) \xrightarrow{\frown [D_r]}{\sim} H_0(D_r) \quad \text{et} \quad H_c^{2n-2}(D_r) \xrightarrow{\frown [X-D_s]}{\sim} H_2(X-D_s, X-D),$$

donnés par une généralisation du produit cap usuel $\frown$ avec la classe fondamentale $[-]$. On obtient ainsi l'isomorphisme de Thom

$$(10) \qquad \tau : H_0(D_r) \xrightarrow{\sim} H_2(X-D_s, X-D),$$

que l'on peut interpréter géométriquement de la façon suivante [5, Chap. VIII, § 11]. Si Δ est une composante connexe de D_r et si on note η_Δ l'élément de $H_0(D_r)$ correspondant, alors $\tau(\eta_\Delta) \in H_2(X-D_s, X-D)$ peut être représenté par un petit disque transverse à Δ. En utilisant cet isomorphisme τ, on obtient de (9) la suite exacte

$$(11) \qquad H_2(X) \xrightarrow{\gamma} H_0(D_r) \xrightarrow{\beta} H_1(X-D) \to H_1(X) \to 0\,.$$

Le groupe $H_0(D_r)$ est abélien libre sur les composantes connexes de D_r. Montrons que ces dernières correspondent exactement aux composantes algébriques irréductibles de D. Considérons la décomposition $D = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_m$ de D en composantes irréductibles. Comme $\Delta_i \cap \Delta_j \subset D_s$ si $i \neq j$, on a une réunion disjointe $D_r = \Delta'_1 \amalg \ldots \amalg \Delta'_m$, où les $\Delta'_i := \Delta_i \cap D_r$ sont non vides, fermés, ouverts (dans D_r) et irréductibles pour la topologie de Zariski. Ils sont ainsi fermés, ouverts et connexes pour la topologie transcendante. Ce sont donc les composantes connexes de D_r.

Notons $\mathscr{C}(D)$ l'ensemble des composantes irréductibles de D. Grâce à la décomposition $H_0(D_r) = \oplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D)} \mathbf{Z}\eta_\Delta$, on peut définir, pour tout $\Delta \in \mathscr{C}(D)$, l'homomorphisme $\varepsilon_\Delta : H_0(D_r) \to \mathbf{Z}$ dual de η_Δ, donné par $\varepsilon_\Delta(\eta_{\Delta'}) = \delta_{\Delta,\Delta'}$. Comme $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est divisible, le foncteur $\mathrm{Hom}(-, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est exact et, appliqué à (11), il fournit la suite exacte:

$$(12) \quad 0 \to H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \oplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D)} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\varepsilon_\Delta \to H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})\,.$$

2) *Passage à* $\chi(K)$: Soient $D_1, D_2 \in \mathscr{V}(X)$ avec $D_1 \subset D_2$. On vérifie facilement que les suites (11) et donc (12) leur correspondant sont compatibles, l'application $\oplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D_1)} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\varepsilon_\Delta \to \oplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D_2)} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\varepsilon_\Delta$ étant l'injection induite par $\mathscr{C}(D_1) \subset \mathscr{C}(D_2)$. On peut alors prendre la limite inductive de toutes ces suites et en utilisant que $\mathrm{Div}(X) = \varinjlim_{D \in \mathscr{V}(X)} \{\oplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D)} \mathbf{Z}\Delta\}$, on trouve la suite exacte désirée

$$0 \to H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \chi(K) \to \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{c} H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})\,.$$

3) *Identification de* c: Il reste à montrer que $c : \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est induit par la première classe de Chern $c_1 : \mathrm{Div}(X) \to H^2(X, \mathbf{Z})$. En supposant tout d'abord la variété X compacte (et lisse), on va le vérifier sur un élément de la base de $\mathrm{Div}(X)$, c'est-à-dire sur une sous-variété de codimension 1 *irréductible* D de X. Dans ce cas, si $l \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, on a défini $c(D \otimes l)$ comme l'image de $l\varepsilon_D$ par l'application $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}\varepsilon_D \to \mathrm{Hom}(H_2(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ duale de l'homomorphisme $\gamma : H_2(X) \to H_0(D_r)$ de (11). On peut se ramener à considérer l'application $\gamma^* : \mathbf{Z}\varepsilon_D \to \mathrm{Hom}(H_2(X), \mathbf{Z})$ duale dans $\mathbf{Z}$ de γ et à vérifier, pour tout $\omega \in H_2(X)$, la formule

$$(13) \qquad < c_1(D); \omega > \; = \gamma^*(\varepsilon_D)\,(\omega)$$

où $< ; > : H^2(X, \mathbf{Z}) \times H_2(X) \to \mathbf{Z}$ est l'évaluation (l'indice de Kronecker).

Notons $i: D \hookrightarrow X$ l'inclusion et $[D] \in H_{2n-2}(D)$ la classe fondamentale (D est compact). D'après [11], $c_1(D)$ est le dual de Poincaré de la classe d'homologie de X portée par D; en formules $c_1(D) = (i_*[D])_d$. En exprimant l'indice de Kronecker au moyen du produit cap et de $\varepsilon: H_0(X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$ (voir [5, Chap. VII, n° 12.24]), le premier membre de (13) devient

$$< c_1(D); \omega > \; = \; < (i_*[D])_d; \omega > \; = \; \varepsilon\big((i_*[D])_d \frown \omega\big) .$$

Passons au second membre et examinons $\gamma: H_2(X) \to H_0(D_r)$. D'après sa définition, γ peut être calculé à l'aide du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
H_2(X) & \to & H_2(X, X-D) & \simeq & H_2(X-D_s, X-D) \\
\simeq \uparrow \frown [X] & & \simeq \uparrow \frown [X] & & \simeq \uparrow \frown [X-D_s] \\
H^{2n-2}(X) & \xrightarrow{i^*} & H^{2n-2}(D) & \simeq & H_c^{2n-2}(D_r) \\
 & & \simeq \downarrow \frown [D] & & \simeq \downarrow \frown [D_r] \\
 & & H_0(D) & \simeq & H_0(D_r) ,
\end{array}$$

où l'isomorphisme $H_c^{2n-2}(D_r) \xrightarrow{\sim} H^{2n-2}(D) = H_c^{2n-2}(D)$ est induit par l'inclusion $D_r \subset D$. Par l'isomorphisme $H_0(D) \simeq H_0(D_r)$, on peut considérer $\gamma(\omega)$ comme élément de $H_0(D)$ et $\varepsilon_D: H_0(D) \to \mathbf{Z}$. Le second membre de (13) est alors

$$\gamma^*(\varepsilon_D)(\omega) \; = \; \varepsilon_D(i^*\omega_d \frown [D]) ,$$

où ω_d est le dual de Poincaré de ω.

Notons encore $i_*: H_0(D) \to H_0(X)$ l'application induite par i. Il faut vérifier l'égalité dans $H_0(X)$ de $(i_*[D])_d \frown \omega$ et de $i_*(i^*\omega_d \frown [D])$, mais par naturalité du produit cap [5, Chap. VII, n° 12.6], on a $i_*(i^*\omega_d \frown [D]) = \omega_d \frown i_*[D]$. En utilisant ensuite la formule d'associativité du produit cap [5, Chap. VII, n° 12.7] et le fait que ω et $\omega' := i_*[D]$ sont de dimension paire, on voit facilement que $\omega'_d \frown \omega = \omega_d \frown \omega'$, ce qui montre (13).

Dans le cas général (X non compact), on plonge X comme ouvert dans une variété complète $\tilde{X}$ que l'on peut supposer lisse par le théorème de désingularisation de Hironaka [9]. On vérifie ensuite la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Div}(\tilde{X}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \xrightarrow{\tilde{c}} & H^2(\tilde{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \xrightarrow{c} & H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) ,
\end{array}$$

où les homomorphismes verticaux sont induits par l'inclusion $X \subset \tilde{X}$, celui de gauche étant surjectif. Comme $\tilde{X}$ est compact, on peut appliquer le raisonnement ci-dessus à $\tilde{c}$. On en déduit que $\tilde{c}$ et donc c sont induits par la première classe de Chern. □

§ 5. Application à la construction d'algèbres simples

On a vu que pour un corps de fonctions complexes K et pour une variété algébrique lisse X avec $\mathbf{C}(X) = K$, on a la suite exacte

$$0 \to H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{a} \chi(K) \xrightarrow{b} \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{c} H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) .$$

Problème 5.1. Soient $f \in \mathscr{P}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n))$ un polynôme unitaire irréductible, ξ une racine de f engendrant l'extension K de $\mathbf{C}(t_1, ..., t_n)$ et X une variété algébrique lisse avec $\mathbf{C}(X) = K$.

Etant donné $\delta \in \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ tel que $c(\delta) = 0$, on aimerait décrire tous les relevés de δ par b et les éléments de $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_{n+1}))$ leur correspondant par l'isomorphisme (5).

On va résoudre ce problème en explicitant l'homomorphisme b (lemme 5.2 ci-dessous). Par contre, la méthode de calcul de a qu'on peut déduire de la démonstration du théorème 3.1 (point 4, avec $\Delta = \emptyset$) n'est pas très explicite. Nous comparerons les deux descriptions de $\mathrm{Im}a = \mathrm{Ker}b$ en fin de paragraphe.

Lemme 5.2. *Soit* $\varphi \in \chi(K)$. *Notons* $L = \bar{K}^{\mathrm{Ker}\,\varphi}$ *et* θ *le générateur de* $\mathrm{Gal}(L/K)$ *tel que* $\varphi(\theta) = 1/m \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. *Soit* $\kappa \in K$ *tel que* $L = K(\sqrt[m]{\kappa})$ *et* $\theta(\sqrt[m]{\kappa}) = e^{-2\pi i/m} \cdot \sqrt[m]{\kappa}$. *Alors* $b(\varphi) = (\kappa) \otimes 1/m \in \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, *où* (κ) *est le diviseur de* κ.

Démonstration. D'après la définition de b, il faut d'abord calculer l'image de φ dans $\varinjlim_{D \in \mathscr{V}(X)} H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ par l'isomorphisme F du théorème 3.1. On va voir qu'on peut représenter $F(\varphi)$ dans $H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ pour D le support du diviseur (κ), puis on va exprimer son représentant $\pi^*(\varphi)$ en terme de κ. Il faudra ensuite revenir à la démonstration du théorème 4.1 pour calculer $b(\varphi)$ à partir de $\pi^*(\varphi)$.

1) *Choix de* $D \in \mathscr{V}(X)$: Notons (Y, ν) la normalisation de X dans L et $D \in \mathscr{V}(X)$ le support de (κ). On montre que D contient la ramification de ν.

Soit U un ouvert affine quelconque de $X - D$. Considérons la sous-variété affine V de $U \times \mathbf{C}$ définie par

$$V = \{(x, \zeta) \in U \times \mathbf{C} \mid \zeta^m = \kappa(x)\} . \tag{14}$$