§2. La normalisation

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1984)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

sentant $\iota(\varphi) \in \mathrm{Br}(K(t))$. Choisissons une racine $\xi_f \in \bar{K}$ de f et considérons le corps fixe L de $\bar{K}$ par $\mathrm{Ker}\varphi$ qui est une extension cyclique de K_f. Si m est son degré, notons θ le générateur de $G'_f := \mathrm{Gal}(L/K_f)$ tel que $\varphi(\theta) = 1/m$ dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

L'image de φ dans $H^2(G'_f, L(t)^\cdot) \subset H^2(G_f, \bar{K}(t)^\cdot)$ est représentée par le cocycle

$$c(\theta^i, \theta^j) = \begin{cases} t - \xi_f & \text{si } i + j \geqslant m, \\ 1 & \text{si } i + j < m. \end{cases} \qquad (0 \leqslant i, j < m).$$

Il lui correspond dans $\mathrm{Br}(L(t)/K_f(t)) \subset \mathrm{Br}(K_f(t))$ la classe du produit croisé cyclique $A := (L(t)/K_f(t), \theta, t - \xi_f)$. On a alors $\iota(\varphi) = \mathrm{cor}([A])$, où cor: $\mathrm{Br}(K_f(t)) \to \mathrm{Br}(K(t))$ est la corestriction.

Mentionnons qu'il existe des formules explicites pour calculer la corestriction d'une algèbre simple [16], si bien que $\iota(\varphi)$ peut être exprimé explicitement.

Conséquence: Le théorème 1.1 donne une méthode pour calculer le groupe de Brauer des corps de fractions rationnelles à coefficients complexes. Sachant que $\mathrm{Br}(\mathbf{C}) = 0$ et $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t)) = 0$ (par le théorème de Tsen), on peut faire une récurrence sur n:

$$(5) \qquad \mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_{n+1})) = \mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n)) \oplus \{\oplus_{f \in \mathscr{P}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n))} \chi(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n)_f)\}.$$

Tout le problème est de calculer les groupes $\chi(K)$ pour les corps de fonctions complexes à n variables K. On va d'abord faire un rappel de géométrie algébrique.

§ 2. La normalisation

Dans tout ce paragraphe, on ne fait que rappeler une construction très standard de géométrie algébrique: la normalisation, car elle joue un rôle essentiel dans la démonstration du théorème 3.1.

Toutes les variétés considérées dans ce paragraphe seront algébriques irréductibles (réduites) et le corps de base k algébriquement clos. On notera $k(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur une variété X, qui est égal au corps des fractions de l'anneau $k[U]$ des fonctions régulières sur U, pour tout ouvert affine U de X.

Rappelons qu'un morphisme $\mu: Y \to X$ entre deux variétés est dit fini s'il satisfait les conditions équivalentes (voir [12, Chap. III, § 1, prop. 5])

(i) Pour tout ouvert affine U de X, $\mu^{-1}(U)$ est affine et l'application $\mu^*: k[U] \to k[\mu^{-1}(U)]$ induite par μ fait de $k[\mu^{-1}(U)]$ un module de type fini sur $k[U]$.

(ii) Il existe un recouvrement affine $\{U_i\}_{i \in I}$ de X tel que pour tout $i \in I$, $\mu^{-1}(U_i)$ est affine et μ^* fait de $k[\mu^{-1}(U_i)]$ un module de type fini sur $k[U_i]$.

Rappelons aussi qu'une variété Y est dite normale si pour tout ouvert affine V de Y, l'anneau $k[V]$ est intégralement clos. On utilisera qu'une variété lisse est normale.

THÉORÈME 2.1. *Soit X une variété et L une extension finie de $k(X)$. Alors il existe une variété normale Y et un morphisme fini $\nu: Y \to X$ tels que $k(Y)$ est isomorphe à L (notons $\tau: k(Y) \xrightarrow{\sim} L$) et que $\tau \circ \nu^*$ est l'inclusion donnée de $k(X)$ dans L. De plus, si (Y, ν) et (Y', ν') satisfont ces conditions, alors il existe un isomorphisme $\sigma: Y \xrightarrow{\sim} Y'$ tel que $\nu' \circ \sigma = \nu$.*

Définition: La paire (Y, ν) du théorème est appelée la normalisation de X dans L.

Démonstration du théorème 2.1.

1) *Unicité:* Soit (Y, ν) une normalisation de X dans L. Si $U \subset X$ est un ouvert affine, comme ν est fini, $V := \nu^{-1}(U)$ est affine et $k[V]$ est entier sur $k[U]$. Comme $k[V]$ est aussi intégralement clos par normalité de Y, c'est la clôture intégrale de $k[U]$ dans $k(Y)$.

Soit (Y', ν') une autre normalisation de X dans L et soit $\tau: k(Y') \to k(Y)$ un isomorphisme qui est l'identité sur $k(X)$. Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement affine de X. Pour $i \in I$, notons $V_i = \nu^{-1}(U_i)$ et $V_i' = \nu'^{-1}(U_i)$. Comme $k[V_i]$ et $k[V_i']$ sont les clôtures intégrales de $k[U_i]$ dans $k(Y)$ et $k(Y')$, $\tau(k[V_i']) = k[V_i]$ et τ induit un isomorphisme $\sigma_i: V_i \to V_i'$.

On montre que ces isomorphismes σ_i sont compatibles. Soient $i, j \in I$. Comme l'intersection de deux ouverts affines est affine [12, Chap. II, § 6, prop. 6], $V_i' \cap V_j'$ est affine et les restrictions de σ_i et σ_j de $V_i \cap V_j$ dans $V_i' \cap V_j'$ coïncident, car elles sont toutes deux induites par la restriction de τ à $k[V_i' \cap V_j']$. Donc les isomorphismes σ_i sont compatibles et ils définissent $\sigma: Y \xrightarrow{\sim} Y'$. Par construction, $\nu' \circ \sigma = \nu$.

2) *Existence:* Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement affine fini de X. Pour $i\in I$, notons B_i la clôture intégrale de $k[U_i]$ dans L. Comme $k[U_i]$ est une algèbre de type fini sur k, B_i est un module de type fini sur $k[U_i]$ (voir [21, Chap. V, § 4, th. 9]) et une algèbre de type fini sur k. Notons $V_i = \mathrm{Specm}(B_i)$ et $\nu_i: V_i \to U_i$ le morphisme fini défini par l'inclusion $k[U_i] \subset B_i = k[V_i]$.

Montrons qu'on peut recoller les V_i pour construire la normalisation. Soient $i,j\in I$. Comme $V_{ij} := \nu_i^{-1}(U_i\cap U_j)$ est normal et $\nu_i\mid_{V_{ij}}$ fini (ce sont des propriétés locales), la paire $(V_{ij}, \nu_i\mid_{V_{ij}})$ est une normalisation de $U_i\cap U_j$ dans L. Il en est de même de $(V_{ji}, \nu_j\mid_{V_{ji}})$, donc par unicité de la normalisation, ces paires sont isomorphes. On peut ainsi recoller les V_i en une prévariété Y et définir $\nu: Y\to X$ coïncidant avec ν_i sur chaque V_i.

Pour que Y soit une variété, il faut que la diagonale soit fermée dans $Y\times Y$, ce qu'on va vérifier sur le recouvrement $\{V_i\times V_j\}_{i,j\in I}$. Pour tout $i,j\in I$, la diagonale Δ de $V_i\times V_j$ est irréductible, car isomorphe à $V_i\cap V_j$. Comme X est une variété, la diagonale δ de $U_i\times U_j$ est fermée et donc $(\nu_i\times\nu_j)^{-1}(\delta)$ est un fermé de $V_i\times V_j$ contenant Δ. On montre que Δ en est en fait une composante irréductible.

En effet, si $\Sigma = \bar{\Delta}$ est la composante irréductible de $(\nu_i\times\nu_j)^{-1}(\delta)$ qui contient Δ, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V_i\cap V_j & \xrightarrow{D} & \Sigma \\ \nu\downarrow & & \downarrow\ \nu_i\times\nu_j \\ U_i\cap U_j & \xrightarrow{d} & \delta \end{array}$$

où D et d sont les isomorphismes sur les diagonales. Comme $(\nu_i\times\nu_j)\circ D = d\circ\nu$ est fini, D est fini et l'image de D est Σ, car tout morphisme fini dominant est surjectif [18, Chap. I, th. 5.4]. On a donc $\Delta = \Sigma = \bar{\Delta}$. □

PROPOSITION 2.2. *Soient* ρ *un automorphisme d'une variété* X *et* (Y,ν) *la normalisation de* X *dans une extension finie de* $k(X)$. *Alors l'application* $\varepsilon:\sigma\mapsto\sigma^*$ *est une bijection entre l'ensemble des automorphismes de* Y *projetés sur* ρ *par* ν *et celui des automorphismes de* $k(Y)$ *dont la restriction à* $k(X)$ *est* ρ^*.

Démonstration.

1) *Injectivité de* ε: Soient $\sigma,\tau\in\mathrm{Aut}(Y)$ tels que $\sigma^* = \tau^*$ et soit $y\in Y$. On a forcément $\sigma(y) = \tau(y)$. En effet, si $\sigma(y)\neq\tau(y)$, on peut trouver un

ouvert affine V de Y les contenant — en prenant l'image réciproque par ν d'un ouvert affine de X contenant $\nu(\sigma(y)) = \nu(\tau(y))$ — ainsi qu'une fonction $\lambda \in k[V] \subset k(Y)$ telle que $\lambda(\sigma(y)) \neq \lambda(\tau(y))$, ce qui contredit $\sigma^* = \tau^*$.

2) *Surjectivité de* ε: Soit $\tau \in \mathrm{Aut}(k(Y))$ tel que $\tau|_{k(X)} = \rho^*$. On procède comme dans la démonstration du théorème 2.1 (unicité) pour construire $\sigma \in \mathrm{Aut}(Y)$ tel que $\sigma^* = \tau$.

Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement affine de X tel que $\rho(U_i) = U_{r(i)}$. Pour $i \in I$, notons $V_i = \nu^{-1}(U_i)$. Comme $k[V_i]$ est la clôture intégrale de $k[U_i]$ dans $k(Y)$ et que $\tau|_{k[U_i]} = \rho^*$, on a $\tau(k[V_{r(i)}]) = k[V_i]$ et τ induit un isomorphisme $\sigma_i : V_i \to V_{r(i)}$. Ces morphismes sont compatibles, car pour tout $i, j \in I$, les restrictions de σ_i et σ_j à $V_i \cap V_j$ sont induites par τ. On peut donc définir $\sigma \in \mathrm{Aut}(Y)$ coïncidant avec σ_i sur V_i pour tout $i \in I$. Par construction, σ est projeté sur ρ par ν et $\sigma^* = \tau$. □

Etant donné un morphisme $\mu : Y \to X$, on notera $\mathrm{Aut}_X^{\mathrm{alg}}(Y)$ le groupe des automorphismes de Y se projetant sur l'identité de X par μ et si L/K est une extension de corps, $\mathrm{Aut}(L/K)$ sera le groupe des automorphismes de L qui sont l'identité sur K.

On déduit immédiatement de la proposition 2.2

COROLLAIRE 2.3. *Soit* (Y, ν) *la normalisation d'une variété* X *dans une extension finie de* $k(X)$. *Alors* $\sigma \mapsto (\sigma^*)^{-1}$ *est un isomorphisme de* $\mathrm{Aut}_X^{\mathrm{alg}}(Y)$ *sur* $\mathrm{Aut}(k(Y)/k(X))$.

COROLLAIRE 2.4. *Soit* X *une variété et soient* $L'/L/K$ *des extensions galoisiennes finies de* $K := k(X)$. *Si* (Y, ν) *et* (Y', μ) *sont les normalisations de* X *dans* L *et de* Y *dans* L', *alors* $(Y', \nu \circ \mu)$ *est la normalisation de* X *dans* L' *et on a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \to & \mathrm{Gal}(L'/L) & \to & \mathrm{Gal}(L'/K) & \to & \mathrm{Gal}(L/K) \to 1 \\ & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\ 1 & \to & \mathrm{Aut}_Y^{\mathrm{alg}}(Y') & \to & \mathrm{Aut}_X^{\mathrm{alg}}(Y') & \xrightarrow{\mu_*} & \mathrm{Aut}_X^{\mathrm{alg}}(Y) \to 1 \end{array}$$

où les isomorphismes verticaux sont ceux du corollaire 2.3 et où μ_* *est la projection sur* Y *des automorphismes de* Y'. □