

# §1. Théorème d'Auslander-Brumer-Faddeev

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1984)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

où  $f$  parcourt l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles à coefficients dans  $\mathbf{C}(t_1, \dots, t_i)$  pour  $1 \leq i < n$ . On établit enfin que  $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$  est divisible et que, pour  $n \geq 2$ , sa classe d'isomorphie est indépendante de  $n$ .

Les deux premiers paragraphes sont consacrés aux rappels du théorème d'Auslander-Brumer-Faddeev (qui fournit la décomposition de  $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$  en somme directe) et de la normalisation en géométrie algébrique. Dans les paragraphes 3 et 4, on dérive la suite exacte qui détermine le groupe  $\chi(K)$ . On en tire au paragraphe 5 un procédé pour construire « explicitement » des algèbres simples, puis on termine en établissant au paragraphe 6 la formule finale pour  $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$  et en montrant que ce groupe est divisible.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à accomplir ce travail, notamment M. Kervaire qui m'en a suggéré le thème.

### § 1. THÉORÈME D'AUSLANDER-BRUMER-FADDEEV

Ce théorème calcule la structure du groupe de Brauer d'un corps de fractions rationnelles à une variable sur un corps quelconque. En se restreignant à la caractéristique zéro pour simplifier, on va rappeler (d'après [7]) comment il découle d'un résultat classique de Tsen.

Si  $K$  est un corps, on notera  $K^\cdot$  son groupe multiplicatif,  $\mathcal{P}(K)$  l'ensemble des polynômes en  $T$  unitaires irréductibles à coefficients dans  $K$  et si  $f \in \mathcal{P}(K)$ ,  $K_f$  sera l'extension  $K[T]/(f(T))$  de  $K$ . Si  $\bar{K}$  est une clôture algébrique de  $K$ , on considérera le groupe  $\chi_{\bar{K}}(K)$  des homomorphismes  $\text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  d'ordre fini (le groupe des homomorphismes continus pour les topologies discrète de  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  et naturelle de  $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ ). Comme  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  est abélien, si  $\tilde{K}$  est une autre clôture algébrique de  $K$ ,  $\chi_{\tilde{K}}(K)$  est canoniquement isomorphe à  $\chi_{\bar{K}}(K)$  et sera noté simplement  $\chi(K)$ .

**THÉORÈME 1.1** (Auslander-Brumer [1], Faddeev [6]). *Soit  $K$  un corps de caractéristique zéro. On a un isomorphisme naturel*

$$\text{Br}(K(t)) = \text{Br}(K) \oplus \left\{ \bigoplus_{f \in \mathcal{P}(K)} \chi(K_f) \right\}.$$

*Démonstration.* Tout repose sur l'interprétation du groupe de Brauer comme groupe de cohomologie galoisienne. Pour cette interprétation, ainsi que pour la notion de produit croisé, on pourra se reporter à [14].

1) *Construction de l'isomorphisme:* Fixons une clôture algébrique  $\bar{K}$  de  $K$ . Par le théorème de Tsen [14, Chap. 19, § 4],  $\text{Br}(\bar{K}(t)) = 0$  et donc

$$(1) \quad \text{Br}(K(t)) = \text{Br}(\bar{K}(t)/K(t)) \simeq H^2(G, \bar{K}(t)^\cdot),$$

où  $G := \text{Gal}(\bar{K}(t)/K(t))$  s'identifie à  $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ .

Si l'on écrit additivement le groupe  $\bar{K}(t)^\cdot$ , la factorisation des fractions rationnelles s'exprime comme  $\bar{K}(t)^\cdot = \bar{K}^\cdot \oplus \{\oplus_{\xi \in \bar{K}} \mathbf{Z}(t-\xi)\}$ . On peut en déduire une décomposition de  $\bar{K}(t)^\cdot$  comme  $G$ -module. En effet, l'orbite par  $G$  de  $\xi \in \bar{K}$  étant l'ensemble des racines du polynôme minimal de  $\xi$  sur  $K$ , on a

$$(2) \quad \bar{K}(t)^\cdot = \bar{K}^\cdot \oplus \{\oplus_{f \in \mathcal{P}(K)} O(\xi_f)\},$$

où  $\xi_f \in \bar{K}$  est une racine de  $f$  et  $O(\xi_f)$  le  $\mathbf{Z}G$ -module engendré par  $t - \xi_f$ . En substituant (2) dans (1) et en utilisant  $H^2(G, \bar{K}^\cdot) \simeq \text{Br}(K)$ , on obtient

$$(3) \quad \text{Br}(K(t)) = \text{Br}(K) \oplus \{\oplus_{f \in \mathcal{P}(K)} H^2(G, O(\xi_f))\}.$$

Le choix de la racine  $\xi_f$  de  $f$  fournit un plongement de  $K_f$  dans  $\bar{K}$ , de sorte que le stabilisateur de  $\xi_f$  est  $G_f := \text{Gal}(\bar{K}/K_f)$  et que  $O(\xi_f)$  est isomorphe au  $G$ -module  $\mathbf{Z}[G/G_f]$  sur les classes à gauche de  $G$  modulo  $G_f$ . Considérons le  $G_f$ -module trivial  $\mathbf{Z}$ . On peut munir  $\text{Hom}_{G_f}(\mathbf{Z}G, \mathbf{Z})$  d'une structure de  $G$ -module par  $(g \cdot \varphi)(x) = \varphi(xg)$  pour  $\varphi \in \text{Hom}_{G_f}(\mathbf{Z}G, \mathbf{Z})$ ,  $g \in G$  et  $x \in \mathbf{Z}G$ .

Comme l'indice de  $G_f$  dans  $G$  est fini (égal à  $[K_f : K]$ ), on a un isomorphisme de  $G$ -modules

$$\mathbf{Z}[G/G_f] \rightarrow \text{Hom}_{G_f}(\mathbf{Z}G, \mathbf{Z}).$$

$$\sum n_c c \mapsto [g^{-1} \mapsto n_{\bar{g}}],$$

où  $\bar{g} \in G/G_f$  est la classe de  $g \in G$ . En utilisant le lemme de Shapiro [19, n° 3-7-14], on en déduit

$$(4) \quad H^2(G, O(\xi_f)) \simeq H^2(G, \text{Hom}_{G_f}(\mathbf{Z}G, \mathbf{Z})) \simeq H^2(G_f, \mathbf{Z}).$$

La suite exacte  $0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \rightarrow 0$  de  $G_f$ -modules triviaux fournit une suite exacte en cohomologie

$$H^1(G_f, \mathbf{Q}) \rightarrow H^1(G_f, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\delta} H^2(G_f, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(G_f, \mathbf{Q}),$$

où  $\delta$  est un isomorphisme, puisque  $H^i(G_f, \mathbf{Q}) = 0$ ,  $\mathbf{Q}$  étant  $G_f$ -injectif. On vérifie enfin que  $H^1(G_f, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq \chi(K_f)$ , d'où  $H^2(G, O(\xi_f)) \simeq \chi(K_f)$ . Cela fournit avec (3) l'isomorphisme voulu.

2) *Naturalité de l'isomorphisme*: On montre que cet isomorphisme ne dépend pas du choix de la racine  $\xi_f \in \bar{K}$  du polynôme  $f \in \mathcal{P}(K)$ .

Fixons  $f \in \mathcal{P}(K)$  et choisissons  $\xi_1, \xi_2 \in \bar{K}$  deux racines de  $f$ . Notons  $K_1, K_2$  les plongements de  $K_f$  dans  $\bar{K}$  et  $G_1 = \text{Gal}(\bar{K}/K_1)$ ,  $G_2 = \text{Gal}(\bar{K}/K_2)$  les stabilisateurs correspondants. Si  $g \in G$  est tel que  $\xi_2 = g\xi_1$  (d'où  $K_2 = gK_1$  et  $G_2 = gG_1g^{-1}$ ), il induit un isomorphisme  $\alpha: \chi(K_1) \xrightarrow{\sim} \chi(K_2)$  par  $\alpha(\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}xg)$ . Il faut montrer que les éléments de  $\text{Br}(K(t))$  correspondant à  $\varphi \in \chi(K_1)$  et  $\alpha(\varphi) \in \chi(K_2)$  sont les mêmes.

On vérifie facilement que  $\alpha$  induit un isomorphisme  $\beta: H^2(G_1, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(G_2, \mathbf{Z})$  donné sur un cocycle  $c$  par  $\beta(c)(x, y) = c(g^{-1}xg, g^{-1}yg)$ . Pour  $i = 1, 2$ , notons  $j_i: \mathbf{Z} \hookrightarrow O(\xi_i)$ ,  $j_i(1) = t - \xi_i$  et  $k_i: O(\xi_i) \hookrightarrow \bar{K}(t)$  l'inclusion. L'isomorphisme de (4) s'exprime à l'aide de la corestriction comme  $\text{cor} \circ j_{i*}$  et s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^2(G_i, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{j_{i*}} & H^2(G_i, O(\xi_i)) \xrightarrow{\text{cor}} H^2(G, O(\xi_i)) \\ & & \downarrow k_{i*} \qquad \qquad \downarrow k_{i*} \\ & & H^2(G_i, \bar{K}(t)^\cdot) \xrightarrow{\text{cor}} H^2(G, \bar{K}(t)^\cdot) \end{array}$$

décrivant le plongement de  $H^2(G_i, \mathbf{Z})$  dans  $H^2(G, \bar{K}(t)^\cdot)$ .

Pour montrer que  $\beta$  devient l'identité dans  $H^2(G, \bar{K}(t)^\cdot)$ , on peut définir  $\gamma: H^2(G_1, \bar{K}(t)^\cdot) \rightarrow H^2(G_2, \bar{K}(t)^\cdot)$ , qui prolonge  $\beta$ , par

$$\gamma(c)(x, y) = g \cdot c(g^{-1}xg, g^{-1}yg)$$

et vérifier la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc} H^2(G_1, \bar{K}(t)^\cdot) & \xrightarrow{\text{cor}} & H^2(G, \bar{K}(t)^\cdot) \\ \gamma \downarrow & & \parallel \\ H^2(G_2, \bar{K}(t)^\cdot) & \xrightarrow{\text{cor}} & H^2(G, \bar{K}(t)^\cdot) \end{array}$$

Grâce à la définition de la cohomologie galoisienne, on se ramène à une extension galoisienne finie de  $K$  contenant  $K_1$  et  $K_2$ . Le carré correspondant commute alors en vertu de la compatibilité de la corestriction avec la conjugaison [19, prop. 2-4-5] et du fait qu'un automorphisme intérieur est trivial en cohomologie [19, cor. 2-3-2].  $\square$

*Remarque 1.2.* Il est facile d'expliciter l'isomorphisme du théorème 1.1

$$\iota: \text{Br}(K) \oplus \left\{ \bigoplus_{f \in \mathcal{P}(K)} \chi(K_f) \right\} \xrightarrow{\sim} \text{Br}(K(t)).$$

En effet, si  $[A] \in \text{Br}(K)$ , clairement  $\iota([A]) = [A \otimes_K K(t)] \in \text{Br}(K(t))$  et si  $f \in \mathcal{P}(K)$ ,  $\varphi \in \chi(K_f)$ , on peut également construire une algèbre simple repré-

sentant  $\iota(\varphi) \in \text{Br}(K(t))$ . Choisissons une racine  $\xi_f \in \bar{K}$  de  $f$  et considérons le corps fixe  $L$  de  $\bar{K}$  par  $\text{Ker}\varphi$  qui est une extension cyclique de  $K_f$ . Si  $m$  est son degré, notons  $\theta$  le générateur de  $G'_f := \text{Gal}(L/K_f)$  tel que  $\varphi(\theta) = 1/m$  dans  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ .

L'image de  $\varphi$  dans  $H^2(G'_f, L(t)^\bullet) \subset H^2(G_f, \bar{K}(t)^\bullet)$  est représentée par le cocycle

$$c(\theta^i, \theta^j) = \begin{cases} t - \xi_f & \text{si } i + j \geq m, \\ 1 & \text{si } i + j < m. \end{cases} \quad (0 \leq i, j < m).$$

Il lui correspond dans  $\text{Br}(L(t)/K_f(t)) \subset \text{Br}(K_f(t))$  la classe du produit croisé cyclique  $A := (L(t)/K_f(t), \theta, t - \xi_f)$ . On a alors  $\iota(\varphi) = \text{cor}([A])$ , où  $\text{cor}: \text{Br}(K_f(t)) \rightarrow \text{Br}(K(t))$  est la corestriction.

Mentionnons qu'il existe des formules explicites pour calculer la corestriction d'une algèbre simple [16], si bien que  $\iota(\varphi)$  peut être exprimé explicitement.

*Conséquence:* Le théorème 1.1 donne une méthode pour calculer le groupe de Brauer des corps de fractions rationnelles à coefficients complexes. Sachant que  $\text{Br}(\mathbf{C}) = 0$  et  $\text{Br}(\mathbf{C}(t)) = 0$  (par le théorème de Tsen), on peut faire une récurrence sur  $n$ :

$$(5) \quad \text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_{n+1})) = \text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n)) \oplus \left\{ \bigoplus_{f \in \mathcal{P}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))} \chi(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n)_f) \right\}.$$

Tout le problème est de calculer les groupes  $\chi(K)$  pour les corps de fonctions complexes à  $n$  variables  $K$ . On va d'abord faire un rappel de géométrie algébrique.

## § 2. LA NORMALISATION

Dans tout ce paragraphe, on ne fait que rappeler une construction très standard de géométrie algébrique: la normalisation, car elle joue un rôle essentiel dans la démonstration du théorème 3.1.

Toutes les variétés considérées dans ce paragraphe seront algébriques irréductibles (réduites) et le corps de base  $k$  algébriquement clos. On notera  $k(X)$  le corps des fonctions rationnelles sur une variété  $X$ , qui est égal au corps des fractions de l'anneau  $k[U]$  des fonctions régulières sur  $U$ , pour tout ouvert affine  $U$  de  $X$ .