

GROUPE DE BRAUER DES CORPS DE FRACTIONS RATIONNELLES À COEFFICIENTS COMPLEXES

Autor(en): **Steiner, Philippe A. J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1984)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-53824>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

GROUPE DE BRAUER
DES CORPS DE FRACTIONS RATIONNELLES
À COEFFICIENTS COMPLEXES

par Philippe A. J. STEINER

INTRODUCTION

Le but de cet article est de calculer le groupe de Brauer des corps de fractions rationnelles à coefficients complexes $\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n)$. Dès que n est supérieur ou égal à 2, ce groupe est non nul et il se décompose en une somme directe non dénombrable de groupes $\chi(K)$ associés à des corps de fonctions complexes K . Plus précisément, on a une formule de récurrence

$$\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n)) \simeq \mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_{n-1})) \oplus \{ \oplus_f \chi(K_f) \},$$

où f parcourt l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles à coefficients dans $\mathbf{C}(t_1, \dots, t_{n-1})$ et où K_f est l'extension de $\mathbf{C}(t_1, \dots, t_{n-1})$ obtenue en adjoignant une racine de f .

Chaque groupe $\chi(K)$ est calculé à l'aide d'un modèle géométrique de K , c'est-à-dire à l'aide d'une variété algébrique lisse X ayant K pour corps des fonctions. On obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow \chi(K) \rightarrow \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{c} H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

qui exprime $\chi(K)$ en terme du groupe $\mathrm{Div}(X)$ des diviseurs de X et de la cohomologie $H^i(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ de X muni de la topologie transcendante et où l'homomorphisme c est induit par la première classe de Chern.

On montrera ensuite comment (une fois un modèle X de K fixé) on peut construire des algèbres simples centrales sur $\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n)$ à partir d'éléments de $\mathrm{Div}(X)$ et de $H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, puis qu'il existe un modèle X pour lequel $H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est divisible. Soit X_f un tel modèle de K_f et notons $\mathrm{Div}_0(X_f)$ son groupe des diviseurs dont la première classe de Chern est nulle. On obtient une formule

$$\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n)) \simeq \oplus_f \{ H^1(X_f, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \oplus \mathrm{Div}_0(X_f) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \},$$

où f parcourt l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles à coefficients dans $\mathbf{C}(t_1, \dots, t_i)$ pour $1 \leq i < n$. On établit enfin que $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$ est divisible et que, pour $n \geq 2$, sa classe d'isomorphie est indépendante de n .

Les deux premiers paragraphes sont consacrés aux rappels du théorème d'Auslander-Brumer-Faddeev (qui fournit la décomposition de $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$ en somme directe) et de la normalisation en géométrie algébrique. Dans les paragraphes 3 et 4, on dérive la suite exacte qui détermine le groupe $\chi(K)$. On en tire au paragraphe 5 un procédé pour construire « explicitement » des algèbres simples, puis on termine en établissant au paragraphe 6 la formule finale pour $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$ et en montrant que ce groupe est divisible.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à accomplir ce travail, notamment M. Kervaire qui m'en a suggéré le thème.

§ 1. THÉORÈME D'AUSLANDER-BRUMER-FADDEEV

Ce théorème calcule la structure du groupe de Brauer d'un corps de fractions rationnelles à une variable sur un corps quelconque. En se restreignant à la caractéristique zéro pour simplifier, on va rappeler (d'après [7]) comment il découle d'un résultat classique de Tsen.

Si K est un corps, on notera K^\cdot son groupe multiplicatif, $\mathcal{P}(K)$ l'ensemble des polynômes en T unitaires irréductibles à coefficients dans K et si $f \in \mathcal{P}(K)$, K_f sera l'extension $K[T]/(f(T))$ de K . Si \bar{K} est une clôture algébrique de K , on considérera le groupe $\chi_{\bar{K}}(K)$ des homomorphismes $\text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ d'ordre fini (le groupe des homomorphismes continus pour les topologies discrète de \mathbf{Q}/\mathbf{Z} et naturelle de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$). Comme \mathbf{Q}/\mathbf{Z} est abélien, si \tilde{K} est une autre clôture algébrique de K , $\chi_{\tilde{K}}(K)$ est canoniquement isomorphe à $\chi_{\bar{K}}(K)$ et sera noté simplement $\chi(K)$.

THÉORÈME 1.1 (Auslander-Brumer [1], Faddeev [6]). *Soit K un corps de caractéristique zéro. On a un isomorphisme naturel*

$$\text{Br}(K(t)) = \text{Br}(K) \oplus \left\{ \bigoplus_{f \in \mathcal{P}(K)} \chi(K_f) \right\}.$$

Démonstration. Tout repose sur l'interprétation du groupe de Brauer comme groupe de cohomologie galoisienne. Pour cette interprétation, ainsi que pour la notion de produit croisé, on pourra se reporter à [14].

1) *Construction de l'isomorphisme:* Fixons une clôture algébrique \bar{K} de K . Par le théorème de Tsen [14, Chap. 19, § 4], $\text{Br}(\bar{K}(t)) = 0$ et donc

$$(1) \quad \text{Br}(K(t)) = \text{Br}(\bar{K}(t)/K(t)) \simeq H^2(G, \bar{K}(t)^\cdot),$$

où $G := \text{Gal}(\bar{K}(t)/K(t))$ s'identifie à $\text{Gal}(\bar{K}/K)$.

Si l'on écrit additivement le groupe $\bar{K}(t)^\cdot$, la factorisation des fractions rationnelles s'exprime comme $\bar{K}(t)^\cdot = \bar{K}^\cdot \oplus \{\oplus_{\xi \in \bar{K}} \mathbf{Z}(t - \xi)\}$. On peut en déduire une décomposition de $\bar{K}(t)^\cdot$ comme G -module. En effet, l'orbite par G de $\xi \in \bar{K}$ étant l'ensemble des racines du polynôme minimal de ξ sur K , on a

$$(2) \quad \bar{K}(t)^\cdot = \bar{K}^\cdot \oplus \{\oplus_{f \in \mathcal{P}(K)} O(\xi_f)\},$$

où $\xi_f \in \bar{K}$ est une racine de f et $O(\xi_f)$ le $\mathbf{Z}G$ -module engendré par $t - \xi_f$. En substituant (2) dans (1) et en utilisant $H^2(G, \bar{K}^\cdot) \simeq \text{Br}(K)$, on obtient

$$(3) \quad \text{Br}(K(t)) = \text{Br}(K) \oplus \{\oplus_{f \in \mathcal{P}(K)} H^2(G, O(\xi_f))\}.$$

Le choix de la racine ξ_f de f fournit un plongement de K_f dans \bar{K} , de sorte que le stabilisateur de ξ_f est $G_f := \text{Gal}(\bar{K}/K_f)$ et que $O(\xi_f)$ est isomorphe au G -module $\mathbf{Z}[G/G_f]$ sur les classes à gauche de G modulo G_f . Considérons le G_f -module trivial \mathbf{Z} . On peut munir $\text{Hom}_{G_f}(\mathbf{Z}G, \mathbf{Z})$ d'une structure de G -module par $(g \cdot \varphi)(x) = \varphi(xg)$ pour $\varphi \in \text{Hom}_{G_f}(\mathbf{Z}G, \mathbf{Z})$, $g \in G$ et $x \in \mathbf{Z}G$.

Comme l'indice de G_f dans G est fini (égal à $[K_f : K]$), on a un isomorphisme de G -modules

$$\mathbf{Z}[G/G_f] \rightarrow \text{Hom}_{G_f}(\mathbf{Z}G, \mathbf{Z})$$

$$\sum n_c c \mapsto [g^{-1} \mapsto n_{\bar{g}}],$$

où $\bar{g} \in G/G_f$ est la classe de $g \in G$. En utilisant le lemme de Shapiro [19, n° 3-7-14], on en déduit

$$(4) \quad H^2(G, O(\xi_f)) \simeq H^2(G, \text{Hom}_{G_f}(\mathbf{Z}G, \mathbf{Z})) \simeq H^2(G_f, \mathbf{Z}).$$

La suite exacte $0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \rightarrow 0$ de G_f -modules triviaux fournit une suite exacte en cohomologie

$$H^1(G_f, \mathbf{Q}) \rightarrow H^1(G_f, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\delta} H^2(G_f, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(G_f, \mathbf{Q}),$$

où δ est un isomorphisme, puisque $H^i(G_f, \mathbf{Q}) = 0$, \mathbf{Q} étant G_f -injectif. On vérifie enfin que $H^1(G_f, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq \chi(K_f)$, d'où $H^2(G, O(\xi_f)) \simeq \chi(K_f)$. Cela fournit avec (3) l'isomorphisme voulu.

2) *Naturalité de l'isomorphisme*: On montre que cet isomorphisme ne dépend pas du choix de la racine $\xi_f \in \bar{K}$ du polynôme $f \in \mathcal{P}(K)$.

Fixons $f \in \mathcal{P}(K)$ et choisissons $\xi_1, \xi_2 \in \bar{K}$ deux racines de f . Notons K_1, K_2 les plongements de K_f dans \bar{K} et $G_1 = \text{Gal}(\bar{K}/K_1), G_2 = \text{Gal}(\bar{K}/K_2)$ les stabilisateurs correspondants. Si $g \in G$ est tel que $\xi_2 = g\xi_1$ (d'où $K_2 = gK_1$ et $G_2 = gG_1g^{-1}$), il induit un isomorphisme $\alpha: \chi(K_1) \xrightarrow{\sim} \chi(K_2)$ par $\alpha(\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}xg)$. Il faut montrer que les éléments de $\text{Br}(K(t))$ correspondant à $\varphi \in \chi(K_1)$ et $\alpha(\varphi) \in \chi(K_2)$ sont les mêmes.

On vérifie facilement que α induit un isomorphisme $\beta: H^2(G_1, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(G_2, \mathbf{Z})$ donné sur un cocycle c par $\beta(c)(x, y) = c(g^{-1}xg, g^{-1}yg)$. Pour $i = 1, 2$, notons $j_i: \mathbf{Z} \hookrightarrow O(\xi_i), j_i(1) = t - \xi_i$ et $k_i: O(\xi_i) \hookrightarrow \bar{K}(t)$ l'inclusion. L'isomorphisme de (4) s'exprime à l'aide de la corestriction comme $\text{cor} \circ j_{i*}$ et s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^2(G_i, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{j_{i*}} & H^2(G_i, O(\xi_i)) \xrightarrow{\text{cor}} H^2(G, O(\xi_i)) \\ & & \downarrow k_{i*} \qquad \qquad \downarrow k_{i*} \\ & & H^2(G_i, \bar{K}(t)^\cdot) \xrightarrow{\text{cor}} H^2(G, \bar{K}(t)^\cdot) \end{array}$$

décrivant le plongement de $H^2(G_i, \mathbf{Z})$ dans $H^2(G, \bar{K}(t)^\cdot)$.

Pour montrer que β devient l'identité dans $H^2(G, \bar{K}(t)^\cdot)$, on peut définir $\gamma: H^2(G_1, \bar{K}(t)^\cdot) \rightarrow H^2(G_2, \bar{K}(t)^\cdot)$, qui prolonge β , par

$$\gamma(c)(x, y) = g \cdot c(g^{-1}xg, g^{-1}yg)$$

et vérifier la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc} H^2(G_1, \bar{K}(t)^\cdot) & \xrightarrow{\text{cor}} & H^2(G, \bar{K}(t)^\cdot) \\ \gamma \downarrow & & \parallel \\ H^2(G_2, \bar{K}(t)^\cdot) & \xrightarrow{\text{cor}} & H^2(G, \bar{K}(t)^\cdot). \end{array}$$

Grâce à la définition de la cohomologie galoisienne, on se ramène à une extension galoisienne finie de K contenant K_1 et K_2 . Le carré correspondant commute alors en vertu de la compatibilité de la corestriction avec la conjugaison [19, prop. 2-4-5] et du fait qu'un automorphisme intérieur est trivial en cohomologie [19, cor. 2-3-2]. \square

Remarque 1.2. Il est facile d'expliciter l'isomorphisme du théorème 1.1

$$\iota: \text{Br}(K) \oplus \left\{ \bigoplus_{f \in \mathcal{P}(K)} \chi(K_f) \right\} \xrightarrow{\sim} \text{Br}(K(t)).$$

En effet, si $[A] \in \text{Br}(K)$, clairement $\iota([A]) = [A \otimes_K K(t)] \in \text{Br}(K(t))$ et si $f \in \mathcal{P}(K), \varphi \in \chi(K_f)$, on peut également construire une algèbre simple repré-

sentant $\iota(\varphi) \in \text{Br}(K(t))$. Choisissons une racine $\xi_f \in \bar{K}$ de f et considérons le corps fixe L de \bar{K} par $\text{Ker}\varphi$ qui est une extension cyclique de K_f . Si m est son degré, notons θ le générateur de $G'_f := \text{Gal}(L/K_f)$ tel que $\varphi(\theta) = 1/m$ dans \mathbf{Q}/\mathbf{Z} .

L'image de φ dans $H^2(G'_f, L(t)^\bullet) \subset H^2(G_f, \bar{K}(t)^\bullet)$ est représentée par le cocycle

$$c(\theta^i, \theta^j) = \begin{cases} t - \xi_f & \text{si } i + j \geq m, \\ 1 & \text{si } i + j < m. \end{cases} \quad (0 \leq i, j < m).$$

Il lui correspond dans $\text{Br}(L(t)/K_f(t)) \subset \text{Br}(K_f(t))$ la classe du produit croisé cyclique $A := (L(t)/K_f(t), \theta, t - \xi_f)$. On a alors $\iota(\varphi) = \text{cor}([A])$, où $\text{cor}: \text{Br}(K_f(t)) \rightarrow \text{Br}(K(t))$ est la corestriction.

Mentionnons qu'il existe des formules explicites pour calculer la corestriction d'une algèbre simple [16], si bien que $\iota(\varphi)$ peut être exprimé explicitement.

Conséquence: Le théorème 1.1 donne une méthode pour calculer le groupe de Brauer des corps de fractions rationnelles à coefficients complexes. Sachant que $\text{Br}(\mathbf{C}) = 0$ et $\text{Br}(\mathbf{C}(t)) = 0$ (par le théorème de Tsen), on peut faire une récurrence sur n :

$$(5) \quad \text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_{n+1})) = \text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n)) \oplus \left\{ \bigoplus_{f \in \mathcal{P}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))} \chi(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n)_f) \right\}.$$

Tout le problème est de calculer les groupes $\chi(K)$ pour les corps de fonctions complexes à n variables K . On va d'abord faire un rappel de géométrie algébrique.

§ 2. LA NORMALISATION

Dans tout ce paragraphe, on ne fait que rappeler une construction très standard de géométrie algébrique: la normalisation, car elle joue un rôle essentiel dans la démonstration du théorème 3.1.

Toutes les variétés considérées dans ce paragraphe seront algébriques irréductibles (réduites) et le corps de base k algébriquement clos. On notera $k(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur une variété X , qui est égal au corps des fractions de l'anneau $k[U]$ des fonctions régulières sur U , pour tout ouvert affine U de X .

Rappelons qu'un morphisme $\mu: Y \rightarrow X$ entre deux variétés est dit fini s'il satisfait les conditions équivalentes (voir [12, Chap. III, § 1, prop. 5])

- (i) Pour tout ouvert affine U de X , $\mu^{-1}(U)$ est affine et l'application $\mu^*: k[U] \rightarrow k[\mu^{-1}(U)]$ induite par μ fait de $k[\mu^{-1}(U)]$ un module de type fini sur $k[U]$.
- (ii) Il existe un recouvrement affine $\{U_i\}_{i \in I}$ de X tel que pour tout $i \in I$, $\mu^{-1}(U_i)$ est affine et μ^* fait de $k[\mu^{-1}(U_i)]$ un module de type fini sur $k[U_i]$.

Rappelons aussi qu'une variété Y est dite normale si pour tout ouvert affine V de Y , l'anneau $k[V]$ est intégralement clos. On utilisera qu'une variété lisse est normale.

THÉORÈME 2.1. *Soit X une variété et L une extension finie de $k(X)$. Alors il existe une variété normale Y et un morphisme fini $v: Y \rightarrow X$ tels que $k(Y)$ est isomorphe à L (notons $\tau: k(Y) \xrightarrow{\sim} L$) et que $\tau \circ v^*$ est l'inclusion donnée de $k(X)$ dans L . De plus, si (Y, v) et (Y', v') satisfont ces conditions, alors il existe un isomorphisme $\sigma: Y \xrightarrow{\sim} Y'$ tel que $v' \circ \sigma = v$.*

Définition: La paire (Y, v) du théorème est appelée la normalisation de X dans L .

Démonstration du théorème 2.1.

1) *Unicité:* Soit (Y, v) une normalisation de X dans L . Si $U \subset X$ est un ouvert affine, comme v est fini, $V := v^{-1}(U)$ est affine et $k[V]$ est entier sur $k[U]$. Comme $k[V]$ est aussi intégralement clos par normalité de Y , c'est la clôture intégrale de $k[U]$ dans $k(Y)$.

Soit (Y', v') une autre normalisation de X dans L et soit $\tau: k(Y') \rightarrow k(Y)$ un isomorphisme qui est l'identité sur $k(X)$. Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement affine de X . Pour $i \in I$, notons $V_i = v^{-1}(U_i)$ et $V'_i = v'^{-1}(U_i)$. Comme $k[V_i]$ et $k[V'_i]$ sont les clôtures intégrales de $k[U_i]$ dans $k(Y)$ et $k(Y')$, $\tau(k[V'_i]) = k[V_i]$ et τ induit un isomorphisme $\sigma_i: V_i \rightarrow V'_i$.

On montre que ces isomorphismes σ_i sont compatibles. Soient $i, j \in I$. Comme l'intersection de deux ouverts affines est affine [12, Chap. II, § 6, prop. 6], $V'_i \cap V'_j$ est affine et les restrictions de σ_i et σ_j de $V_i \cap V_j$ dans $V'_i \cap V'_j$ coïncident, car elles sont toutes deux induites par la restriction de τ à $k[V'_i \cap V'_j]$. Donc les isomorphismes σ_i sont compatibles et ils définissent $\sigma: Y \xrightarrow{\sim} Y'$. Par construction, $v' \circ \sigma = v$.

2) *Existence*: Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement affine fini de X . Pour $i \in I$, notons B_i la clôture intégrale de $k[U_i]$ dans L . Comme $k[U_i]$ est une algèbre de type fini sur k , B_i est un module de type fini sur $k[U_i]$ (voir [21, Chap. V, § 4, th. 9]) et une algèbre de type fini sur k . Notons $V_i = \text{Specm}(B_i)$ et $v_i: V_i \rightarrow U_i$ le morphisme fini défini par l'inclusion $k[U_i] \subset B_i = k[V_i]$.

Montrons qu'on peut recoller les V_i pour construire la normalisation. Soient $i, j \in I$. Comme $V_{ij} := v_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ est normal et $v_i|_{V_{ij}}$ fini (ce sont des propriétés locales), la paire $(V_{ij}, v_i|_{V_{ij}})$ est une normalisation de $U_i \cap U_j$ dans L . Il en est de même de $(V_{ji}, v_j|_{V_{ji}})$, donc par unicité de la normalisation, ces paires sont isomorphes. On peut ainsi recoller les V_i en une prévariété Y et définir $v: Y \rightarrow X$ coïncidant avec v_i sur chaque V_i .

Pour que Y soit une variété, il faut que la diagonale soit fermée dans $Y \times Y$, ce qu'on va vérifier sur le recouvrement $\{V_i \times V_j\}_{i, j \in I}$. Pour tout $i, j \in I$, la diagonale Δ de $V_i \times V_j$ est irréductible, car isomorphe à $V_i \cap V_j$. Comme X est une variété, la diagonale δ de $U_i \times U_j$ est fermée et donc $(v_i \times v_j)^{-1}(\delta)$ est un fermé de $V_i \times V_j$ contenant Δ . On montre que Δ en est en fait une composante irréductible.

En effet, si $\Sigma = \bar{\Delta}$ est la composante irréductible de $(v_i \times v_j)^{-1}(\delta)$ qui contient Δ , on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V_i \cap V_j & \xrightarrow{D} & \Sigma \\ v \downarrow & & \downarrow v_i \times v_j \\ U_i \cap U_j & \xrightarrow{d} & \delta \end{array}$$

où D et d sont les isomorphismes sur les diagonales. Comme $(v_i \times v_j) \circ D = d \circ v$ est fini, D est fini et l'image de D est Σ , car tout morphisme fini dominant est surjectif [18, Chap. I, th. 5.4]. On a donc $\Delta = \Sigma = \bar{\Delta}$. \square

PROPOSITION 2.2. *Soient ρ un automorphisme d'une variété X et (Y, v) la normalisation de X dans une extension finie de $k(X)$. Alors l'application $\varepsilon: \sigma \mapsto \sigma^*$ est une bijection entre l'ensemble des automorphismes de Y projetés sur ρ par v et celui des automorphismes de $k(Y)$ dont la restriction à $k(X)$ est ρ^* .*

Démonstration.

1) *Injectivité de ε* : Soient $\sigma, \tau \in \text{Aut}(Y)$ tels que $\sigma^* = \tau^*$ et soit $y \in Y$. On a forcément $\sigma(y) = \tau(y)$. En effet, si $\sigma(y) \neq \tau(y)$, on peut trouver un

ouvert affine V de Y les contenant — en prenant l'image réciproque par v d'un ouvert affine de X contenant $v(\sigma(y)) = v(\tau(y))$ — ainsi qu'une fonction $\lambda \in k[V] \subset k(Y)$ telle que $\lambda(\sigma(y)) \neq \lambda(\tau(y))$, ce qui contredit $\sigma^* = \tau^*$.

2) *Surjectivité de ε* : Soit $\tau \in \text{Aut}(k(Y))$ tel que $\tau|_{k(X)} = \rho^*$. On procède comme dans la démonstration du théorème 2.1 (unicité) pour construire $\sigma \in \text{Aut}(Y)$ tel que $\sigma^* = \tau$.

Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement affine de X tel que $\rho(U_i) = U_{r(i)}$. Pour $i \in I$, notons $V_i = v^{-1}(U_i)$. Comme $k[V_i]$ est la clôture intégrale de $k[U_i]$ dans $k(Y)$ et que $\tau|_{k[U_i]} = \rho^*$, on a $\tau(k[V_{r(i)}]) = k[V_i]$ et τ induit un isomorphisme $\sigma_i: V_i \rightarrow V_{r(i)}$. Ces morphismes sont compatibles, car pour tout $i, j \in I$, les restrictions de σ_i et σ_j à $V_i \cap V_j$ sont induites par τ . On peut donc définir $\sigma \in \text{Aut}(Y)$ coïncidant avec σ_i sur V_i pour tout $i \in I$. Par construction, σ est projeté sur ρ par v et $\sigma^* = \tau$. \square

Etant donné un morphisme $\mu: Y \rightarrow X$, on notera $\text{Aut}_X^{\text{alg}}(Y)$ le groupe des automorphismes de Y se projetant sur l'identité de X par μ et si L/K est une extension de corps, $\text{Aut}(L/K)$ sera le groupe des automorphismes de L qui sont l'identité sur K .

On déduit immédiatement de la proposition 2.2

COROLLAIRE 2.3. *Soit (Y, v) la normalisation d'une variété X dans une extension finie de $k(X)$. Alors $\sigma \mapsto (\sigma^*)^{-1}$ est un isomorphisme de $\text{Aut}_X^{\text{alg}}(Y)$ sur $\text{Aut}(k(Y)/k(X))$.*

COROLLAIRE 2.4. *Soit X une variété et soient $L'/L/K$ des extensions galoisiennes finies de $K := k(X)$. Si (Y, v) et (Y', μ) sont les normalisations de X dans L et de Y dans L' , alors $(Y', v \circ \mu)$ est la normalisation de X dans L' et on a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \text{Gal}(L'/L) & \rightarrow & \text{Gal}(L'/K) & \rightarrow & \text{Gal}(L/K) \rightarrow 1 \\ & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\ 1 & \rightarrow & \text{Aut}_Y^{\text{alg}}(Y') & \rightarrow & \text{Aut}_X^{\text{alg}}(Y') & \xrightarrow{\mu_*} & \text{Aut}_X^{\text{alg}}(Y) \rightarrow 1 \end{array}$$

où les isomorphismes verticaux sont ceux du corollaire 2.3 et où μ_* est la projection sur Y des automorphismes de Y' . \square

§ 3. CALCUL DE $\chi(K)$

Soit K un corps de fonctions complexes et soit \bar{K} une clôture algébrique de K . On choisit une variété algébrique lisse X avec corps des fonctions $C(X) \simeq K$. On veut exprimer $\chi(K) = \text{Hom}_c(\text{Gal}(\bar{K}/K), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ en terme d'invariants de X .

Dans ce qui suit les variétés algébriques complexes, naturellement munies de la topologie de Zariski, seront parfois considérées d'un point de vue analytique et munies de la topologie transcendante; notamment lorsque l'on parlera de leur homologie ou cohomologie. (Sauf indication contraire ces dernières seront à coefficients entiers.) On utilisera que l'on peut trianguler les variétés algébriques complexes [10].

Notons $\mathcal{V}(X)$ l'ensemble des sous-variétés algébriques fermées pures de codimension (complexe) 1 de X , que l'on ordonne par l'inclusion. Si $D \in \mathcal{V}(X)$, le groupe $H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ s'identifie au groupe $\text{Hom}(H_1(X - D), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, et si $D_1, D_2 \in \mathcal{V}(X)$, avec $D_1 \subset D_2$, l'inclusion $j: X - D_2 \hookrightarrow X - D_1$ induit un homomorphisme $j^*: H^1(X - D_1, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(X - D_2, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ qui est injectif. (En effet, le complément de $X - D_2$ dans $X - D_1$ étant une sous-variété de codimension réelle 2, j induit une surjection du groupe fondamental de $X - D_2$ sur celui de $X - D_1$, et donc de $H_1(X - D_2)$ sur $H_1(X - D_1)$.) L'ensemble $\{H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})\}_{D \in \mathcal{V}(X)}$ forme avec ces homomorphismes un système inductif.

On peut maintenant énoncer un premier résultat sur $\chi(K)$.

THÉORÈME 3.1. *Soit K un corps de fonctions complexes et soit X une variété algébrique lisse avec $C(X) \simeq K$. On a un isomorphisme*

$$\chi(K) \simeq \varinjlim_{D \in \mathcal{V}(X)} H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

qui ne dépend que du choix de l'isomorphisme $C(X) \simeq K$.

Préliminaires à la démonstration. Soient X une variété algébrique complexe lisse et L une extension finie de $K := C(X)$. Notons (Y, ν) la normalisation de X dans L . On dira qu'une sous-variété fermée Δ de X contient la ramification de ν si — pour la topologie transcendante — ν est un revêtement non ramifié à $[L: K]$ feuillets au-dessus de $W := X - \Delta$ et on notera $\text{Aut}_W^{\text{top}}(Z)$ ou $\text{Aut}_W(Z)$ le groupe des automorphismes de ce revêtement, où on a posé $Z = Y - \nu^{-1}(\Delta)$. D'après [18, Chap. II, n° 5.3], on peut trouver une variété $\Delta \in \mathcal{V}(X)$ contenant la ramification de ν . (En fait, par le théorème

de pureté de Zariski [20], si la variété de ramification est non vide, elle est pure de codimension 1.)

On a vu au corollaire 2.3 que $\text{Aut}(L/K) \simeq \text{Aut}_X^{\text{alg}}(Y)$. Ces groupes sont reliés au groupe $\text{Aut}_W^{\text{top}}(Z)$ de la manière suivante:

LEMME 3.2. Soient (Y, ν) la normalisation d'une variété lisse X dans une extension finie L de $K := \mathbf{C}(X)$ et $\Delta \in \mathcal{V}(X)$ une sous-variété contenant la ramification de ν . Posons $W = X - \Delta$ et $Z = Y - \nu^{-1}(\Delta)$.

- (i) La restriction des automorphismes à Z est une injection $\text{Aut}_X^{\text{alg}}(Y) \hookrightarrow \text{Aut}_W^{\text{top}}(Z)$.
- (ii) Si l'extension L/K est galoisienne, cette injection est un isomorphisme et le revêtement $\nu: Z \rightarrow W$ est galoisien.
- (iii) Si l'extension L/K est abélienne, on a un isomorphisme canonique $\text{Gal}(L/K) = \text{Aut}_W^{\text{top}}(Z)$ donné par (ii) et le corollaire 2.3.

Démonstration.

- (i) Evident.
- (ii) On compare les ordres de ces groupes finis: $|\text{Aut}_W^{\text{top}}(Z)|$ est inférieur ou égal au nombre de feuillets du revêtement qui est $[L:K]$. Comme d'autre part $[L:K] = |\text{Gal}(L/K)| = |\text{Aut}_X^{\text{alg}}(Y)| \leq |\text{Aut}_W^{\text{top}}(Z)|$, on a égalité et le revêtement ν est galoisien.
- (iii) Si l'on choisit deux K -isomorphismes $\mathbf{C}(Y) \simeq L$, les applications induites $\text{Gal}(L/K) \simeq \text{Aut}_W^{\text{top}}(Z)$ diffèrent par un automorphisme intérieur. \square

On rappelle encore un théorème plus profond dont on aura besoin (voir [8, App. B, th. 3.2; 15, th. 5.1; 17]).

THÉORÈME D'EXISTENCE DE RIEMANN GÉNÉRALISÉ. Soit W une variété algébrique complexe normale et soit $p: Z \rightarrow W$ un revêtement non ramifié fini pour la topologie transcendante. Alors on peut munir Z d'une structure de variété algébrique normale de sorte que p soit un morphisme algébrique fini.

Démonstration du théorème 3.1. On fixe un isomorphisme permettant d'identifier $\mathbf{C}(X)$ à K .

1) *Construction de l'isomorphisme:* On veut définir une application

$$F: \chi(K) \rightarrow \lim_{\rightarrow D \in \mathcal{V}(X)} H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Soit $\phi \in \chi(K)$ un homomorphisme de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ dans \mathbf{Q}/\mathbf{Z} d'ordre fini m .

Notons (Y, ν) la normalisation de X dans $L := \bar{K}^{\text{Ker } \varphi}$ et également $\varphi: \text{Gal}(L/K) \hookrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ l'homomorphisme induit par φ . Soit $\Delta \in \mathcal{V}(X)$ contenant la ramification de ν et posons $W = X - \Delta$, $Z = Y - \nu^{-1}(\Delta)$. Comme L/K est une extension abélienne (cyclique de degré m), par le lemme 3.2, le revêtement $\nu: Z \rightarrow W$ est galoisien et on a l'identification $\text{Aut}_W(Z) = \text{Gal}(L/K)$.

Comme X et Y , $W = X - \Delta$ et $Z = Y - \nu^{-1}(\Delta)$ sont algébriquement irréductibles et donc connexes pour la topologie transcendante [18, Chap. VII, § 2]. La suite exacte usuelle

$$(6) \quad 1 \rightarrow \pi_1(Z) \xrightarrow{\nu^*} \pi_1(W) \rightarrow \text{Aut}_W(Z) \rightarrow 0$$

donne une suite exacte en homologie

$$(7) \quad H_1(Z) \xrightarrow{\nu^*} H_1(W) \rightarrow \text{Aut}_W(Z) \rightarrow 0.$$

Avec l'identification $\text{Aut}_W(Z) = \text{Gal}(L/K)$ du lemme 3.2, on obtient une surjection naturelle

$$(8) \quad \pi: H_1(W) \twoheadrightarrow \text{Gal}(L/K).$$

En notant $\pi^*: \text{Hom}(\text{Gal}(L/K), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow \text{Hom}(H_1(W), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ l'application duale, on peut considérer $\pi^*(\varphi) \in \text{Hom}(H_1(W), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = H^1(W, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ et définir $F(\varphi)$ comme son image dans $\lim_{\substack{\rightarrow \\ D \in \mathcal{V}(X)}} H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

Il faut vérifier que $F(\varphi)$ est indépendant du choix de Δ . Soit donc $\Delta' \in \mathcal{V}(X)$ une autre sous-variété de X contenant la ramification de ν . Quitte à remplacer Δ' par $\Delta' \cup \Delta$, on peut supposer $\Delta \subset \Delta'$. On définit comme plus haut $W' = X - \Delta'$ et $\pi': H_1(W') \twoheadrightarrow \text{Gal}(L/K)$. Par functorialité de la suite exacte (6) [4, p. 12], le carré

$$\begin{array}{ccc} H_1(W') & \xrightarrow{\pi'} & \text{Gal}(L/K) \\ \downarrow & & \parallel \\ H_1(W) & \xrightarrow{\pi} & \text{Gal}(L/K) \end{array}$$

est commutatif. Ceci montre que $\pi'^*(\varphi)$ et $\pi^*(\varphi)$ ont la même image dans $\lim_{\substack{\rightarrow \\ D \in \mathcal{V}(X)}} H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

Remarque. On obtient le même élément $F(\varphi)$ si on fait cette construction à partir de n'importe quelle extension abélienne finie L' de K contenant $L = \bar{K}^{\text{Ker } \varphi}$.

En effet, si (Y', μ) est la normalisation de Y dans L' et si $\nu' = \nu \circ \mu$, alors (Y', ν') est la normalisation de X dans L' . Quitte à agrandir Δ , on peut supposer qu'il contient également la ramification de ν' et définir

$Z' = Y' - v'^{-1}(\Delta)$. La compatibilité évidente entre la suite exacte (7) et celle correspondant à v' s'exprime par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H_1(Z') & \xrightarrow{v'^*} & H_1(W) & \rightarrow & \text{Aut}_W(Z') \\ \mu_* \downarrow & & \parallel & & \downarrow \mu_* \\ H_1(Z) & \xrightarrow{v^*} & H_1(W) & \rightarrow & \text{Aut}_W(Z) \end{array}$$

où l'on vérifie que l'application μ_* de droite est la projection sur Z des automorphismes de Z' .

En utilisant le corollaire 2.4, on en déduit la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc} H_1(W) & \xrightarrow{\pi'} & \text{Gal}(L'/K) \\ \parallel & & \downarrow \\ H_1(W) & \xrightarrow{\pi} & \text{Gal}(L/K), \end{array}$$

d'où $\pi'^*(\varphi) = \pi^*(\varphi)$.

2) F est un homomorphisme: Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \chi(K)$. Notons $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$ et considérons le corps fixe L de \bar{K} par $\text{Ker}\varphi_1 \cap \text{Ker}\varphi_2$, qui est une extension abélienne finie de K contenant les corps fixes de \bar{K} par $\text{Ker}\varphi_1$, $\text{Ker}\varphi_2$ et $\text{Ker}\varphi_3$. Par la remarque qui précède, on peut calculer les images par F de φ_1 , φ_2 et φ_3 en utilisant l'extension L/K . On construit donc à partir de L la variété W et l'homomorphisme $\pi: H_1(W) \rightarrow \text{Gal}(L/K)$ de (8).

Dans $\text{Hom}(\text{Gal}(L/K), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, on a toujours que $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$, puisque l'inclusion $L \subset \bar{K}$ induit une injection $\text{Hom}(\text{Gal}(L/K), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \hookrightarrow \chi(K)$. Ainsi $\pi^*(\varphi_3) = \pi^*(\varphi_1) + \pi^*(\varphi_2)$ dans $H^1(W, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ et $F(\varphi_3) = F(\varphi_1) + F(\varphi_2)$ dans $\lim_{\rightarrow D \in \mathcal{V}(X)} H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

3) F est injective: Soit $\varphi \in \chi(K)$ tel que $F(\varphi) = 0$. Comme précédemment, on construit un homomorphisme $\pi: H_1(W) \rightarrow \text{Gal}(L/K)$. Par définition, $F(\varphi)$ est l'image de $\pi^*(\varphi)$ par l'injection $H^1(W, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \hookrightarrow \lim_{\rightarrow D \in \mathcal{V}(X)} H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

Si donc $F(\varphi) = 0$, on a $\pi^*(\varphi) = 0$ et comme π est surjective, $\varphi = 0$.

4) F est surjective: Soit $\psi \in \lim_{\rightarrow D \in \mathcal{V}(X)} H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Choisissons $\Delta \in \mathcal{V}(X)$ assez grand et, pour $W := X - \Delta$, un représentant $\psi' \in H^1(W, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ de ψ . L'ordre m de $\psi': H_1(W) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est fini, car $H_1(W)$ est de génération finie. En effet, d'après [13], X se plonge comme ouvert dans une variété \tilde{X}

complète, c'est-à-dire compacte pour la topologie transcendante. En triangulant, on peut trouver un voisinage tubulaire U du fermé $\Sigma := (\tilde{X} - X) \cup \bar{\Delta}$, de sorte que $W = X - \Delta = \tilde{X} - \Sigma$ se rétracte par déformations sur $\tilde{X} - U$. Par compacité, l'homologie de $\tilde{X} - U$ (et donc celle de W) est de type fini [5, Chap. VIII, cor. 1.4].

Soit $x \in W$. Notons $\rho: \pi_1(W, x) \rightarrow H_1(W)$ la projection canonique et N le sous-groupe $\text{Ker}(\psi' \circ \rho)$ invariant d'indice m dans $\pi_1(W, x)$. A N correspond un revêtement topologique galoisien non ramifié à m feuillets $p: Z \rightarrow W$, tel que $p_*\pi_1(Z, y) = N$ pour tout $y \in p^{-1}(x)$. Remarquons que le groupe $\text{Aut}_W(Z) \simeq \pi_1(W, x)/p_*\pi_1(Z, y)$ est abélien, car par passage au quotient $\psi' \circ \rho$ devient une injection $\psi'': \text{Aut}_W(Z) \hookrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

C'est maintenant qu'on utilise le théorème d'existence de Riemann généralisé pour savoir qu'on peut munir Z d'une structure de variété algébrique normale de sorte que p soit un morphisme algébrique fini. Notons $L = \mathbf{C}(Z)$. La paire (Z, p) est la normalisation de W dans L , de sorte que, si (Y, ν) est celle de X dans L , par unicité, on peut supposer $Z \subset Y$ et $p = \nu|_Z$.

On veut montrer que l'extension L/K est galoisienne. Pour cela, on choisit une extension galoisienne L'/K contenant L et on considère la normalisation (Y', μ) de Y dans L' . Quitte à agrandir Δ , on peut supposer qu'il contient la ramification de $\nu' := \nu \circ \mu$. Notons $Z' = Y' - \nu'^{-1}(\Delta)$. En utilisant les suites (6) correspondant à ν, ν' et μ , on obtient la suite exacte

$$1 \rightarrow \text{Aut}_Z(Z') \rightarrow \text{Aut}_{W'}(Z') \rightarrow \text{Aut}_W(Z) \rightarrow 1.$$

Par l'isomorphisme du lemme 3.2, l'inclusion de $\text{Aut}_Z(Z')$ dans $\text{Aut}_{W'}(Z')$ correspond à celle de $\text{Gal}(L'/L)$ dans $\text{Gal}(L'/K)$, ce qui montre que ce dernier sous-groupe est invariant et que l'extension L/K est galoisienne.

Soit L_0 l'unique sous-corps de \bar{K} isomorphe à L . On a les identifications $\text{Gal}(L_0/K) = \text{Gal}(L/K) = \text{Aut}_W(Z)$, la première étant induite par n'importe quel isomorphisme $L_0 \simeq L$, mais n'en dépendant pas puisque les groupes sont abéliens. On peut donc définir $\varphi \in \chi(K)$ comme la composition de la projection $\text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \text{Gal}(L_0/K)$ suivie de $\psi'': \text{Aut}_W(Z) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Par construction, $F(\varphi) = \psi$. □

§ 4. INTERPRÉTATION DE $\chi(K)$

Soit K un corps de fonctions complexes et soit X une variété algébrique lisse avec corps des fonctions $\mathbf{C}(X) \simeq K$. A partir du calcul du § 3, on interprète $\chi(K)$ en terme d'invariants usuels de X : le groupe des diviseurs

(algébriques) $\text{Div}(X)$ de X et les premiers groupes de cohomologie de X muni de la topologie transcendante.

THÉORÈME 4.1. *Soit K un corps de fonctions complexes et soit X une variété algébrique lisse avec $\mathbf{C}(X) \simeq K$. Alors on a la suite exacte*

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow \chi(K) \rightarrow \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{c} H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

où l'homomorphisme c est induit par la première classe de Chern.

Démonstration. En identifiant $\mathbf{C}(X)$ à K , on a

$$\chi(K) = \lim_{\rightarrow D \in \mathcal{V}(X)} H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

par le théorème 3.1.

1) *Calcul de $H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$:* Soit $D \in \mathcal{V}(X)$. On veut expliciter le groupe $H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \text{Hom}(H_1(X - D), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. On part de la suite exacte d'homologie de $(X, X - D)$:

$$(9) \quad H_2(X) \rightarrow H_2(X, X - D) \rightarrow H_1(X - D) \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_1(X, X - D).$$

Comme D est de codimension (réelle) 2 dans X , on a immédiatement $H_1(X, X - D) = 0$, car tout lacet dans X peut être poussé dans $X - D$. Notons D_s la partie singulière et $D_r = D - D_s$ la partie régulière de D . Comme D_s est de codimension au moins 4 dans X , on a aussi $H_2(X, X - D) \simeq H_2(X - D_s, X - D)$. On va calculer ce dernier groupe en utilisant l'isomorphisme de Thom.

Notons $2n$ la dimension de X . On a deux isomorphismes de dualité de Poincaré exprimant la cohomologie à supports compacts de D_r [5, Chap. VIII, prop. 7.14]

$$H_c^{2n-2}(D_r) \xrightarrow{\sim} H_0(D_r) \quad \text{et} \quad H_c^{2n-2}(D_r) \xrightarrow{\sim} H_2(X - D_s, X - D),$$

donnés par une généralisation du produit cap usuel \frown avec la classe fondamentale $[-]$. On obtient ainsi l'isomorphisme de Thom

$$(10) \quad \tau: H_0(D_r) \xrightarrow{\sim} H_2(X - D_s, X - D),$$

que l'on peut interpréter géométriquement de la façon suivante [5, Chap. VIII, § 11]. Si Δ est une composante connexe de D_r et si on note η_Δ l'élément de $H_0(D_r)$ correspondant, alors $\tau(\eta_\Delta) \in H_2(X - D_s, X - D)$ peut être représenté par un petit disque transverse à Δ . En utilisant cet isomorphisme τ , on obtient de (9) la suite exacte

$$(11) \quad H_2(X) \xrightarrow{\gamma} H_0(D_r) \xrightarrow{\beta} H_1(X-D) \rightarrow H_1(X) \rightarrow 0.$$

Le groupe $H_0(D_r)$ est abélien libre sur les composantes connexes de D_r . Montrons que ces dernières correspondent exactement aux composantes algébriques irréductibles de D . Considérons la décomposition $D = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_m$ de D en composantes irréductibles. Comme $\Delta_i \cap \Delta_j \subset D_s$ si $i \neq j$, on a une réunion disjointe $D_r = \Delta'_1 \sqcup \dots \sqcup \Delta'_m$, où les $\Delta'_i := \Delta_i \cap D_r$ sont non vides, fermés, ouverts (dans D_r) et irréductibles pour la topologie de Zariski. Ils sont ainsi fermés, ouverts et connexes pour la topologie transcendante. Ce sont donc les composantes connexes de D_r .

Notons $\mathcal{C}(D)$ l'ensemble des composantes irréductibles de D . Grâce à la décomposition $H_0(D_r) = \bigoplus_{\Delta \in \mathcal{C}(D)} \mathbf{Z}\eta_\Delta$, on peut définir, pour tout $\Delta \in \mathcal{C}(D)$, l'homomorphisme $\varepsilon_\Delta: H_0(D_r) \rightarrow \mathbf{Z}$ dual de η_Δ , donné par $\varepsilon_\Delta(\eta_{\Delta'}) = \delta_{\Delta, \Delta'}$. Comme \mathbf{Q}/\mathbf{Z} est divisible, le foncteur $\text{Hom}(-, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est exact et, appliqué à (11), il fournit la suite exacte:

$$(12) \quad 0 \rightarrow H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow \bigoplus_{\Delta \in \mathcal{C}(D)} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\varepsilon_\Delta \rightarrow H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

2) *Passage à $\chi(K)$* : Soient $D_1, D_2 \in \mathcal{V}(X)$ avec $D_1 \subset D_2$. On vérifie facilement que les suites (11) et donc (12) leur correspondant sont compatibles, l'application $\bigoplus_{\Delta \in \mathcal{C}(D_1)} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\varepsilon_\Delta \rightarrow \bigoplus_{\Delta \in \mathcal{C}(D_2)} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\varepsilon_\Delta$ étant l'injection induite par $\mathcal{C}(D_1) \subset \mathcal{C}(D_2)$. On peut alors prendre la limite inductive de toutes ces suites et en utilisant que $\text{Div}(X) = \lim_{D \in \mathcal{V}(X)} \{ \bigoplus_{\Delta \in \mathcal{C}(D)} \mathbf{Z}\Delta \}$, on trouve la suite exacte désirée

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow \chi(K) \rightarrow \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{c} H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

3) *Identification de c* : Il reste à montrer que $c: \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \rightarrow H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est induit par la première classe de Chern $c_1: \text{Div}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbf{Z})$. En supposant tout d'abord la variété X compacte (et lisse), on va le vérifier sur un élément de la base de $\text{Div}(X)$, c'est-à-dire sur une sous-variété de codimension 1 irréductible D de X . Dans ce cas, si $l \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, on a défini $c(D \otimes l)$ comme l'image de $l\varepsilon_D$ par l'application $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}\varepsilon_D \rightarrow \text{Hom}(H_2(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ duale de l'homomorphisme $\gamma: H_2(X) \rightarrow H_0(D_r)$ de (11). On peut se ramener à considérer l'application $\gamma^*: \mathbf{Z}\varepsilon_D \rightarrow \text{Hom}(H_2(X), \mathbf{Z})$ duale dans \mathbf{Z} de γ et à vérifier, pour tout $\omega \in H_2(X)$, la formule

$$(13) \quad \langle c_1(D); \omega \rangle = \gamma^*(\varepsilon_D)(\omega)$$

où $\langle ; \rangle: H^2(X, \mathbf{Z}) \times H_2(X) \rightarrow \mathbf{Z}$ est l'évaluation (l'indice de Kronecker).

Notons $i: D \hookrightarrow X$ l'inclusion et $[D] \in H_{2n-2}(D)$ la classe fondamentale (D est compact). D'après [11], $c_1(D)$ est le dual de Poincaré de la classe d'homologie de X portée par D ; en formules $c_1(D) = (i_*[D])_d$. En exprimant l'indice de Kronecker au moyen du produit cap et de $\varepsilon: H_0(X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$ (voir [5, Chap. VII, n° 12.24]), le premier membre de (13) devient

$$\langle c_1(D); \omega \rangle = \langle (i_*[D])_d; \omega \rangle = \varepsilon((i_*[D])_d \frown \omega).$$

Passons au second membre et examinons $\gamma: H_2(X) \rightarrow H_0(D_r)$. D'après sa définition, γ peut être calculé à l'aide du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H_2(X) & \rightarrow & H_2(X, X-D) & \simeq & H_2(X-D_s, X-D) \\ \simeq \uparrow \frown [X] & & \simeq \uparrow \frown [X] & & \simeq \uparrow \frown [X-D_s] \\ H^{2n-2}(X) & \xrightarrow{i^*} & H^{2n-2}(D) & \simeq & H_c^{2n-2}(D_r) \\ & & \simeq \downarrow \frown [D] & & \simeq \downarrow \frown [D_r] \\ & & H_0(D) & \simeq & H_0(D_r), \end{array}$$

où l'isomorphisme $H_c^{2n-2}(D_r) \xrightarrow{\sim} H^{2n-2}(D) = H_c^{2n-2}(D)$ est induit par l'inclusion $D_r \subset D$. Par l'isomorphisme $H_0(D) \simeq H_0(D_r)$, on peut considérer $\gamma(\omega)$ comme élément de $H_0(D)$ et $\varepsilon_D: H_0(D) \rightarrow \mathbf{Z}$. Le second membre de (13) est alors

$$\gamma^*(\varepsilon_D)(\omega) = \varepsilon_D(i^*\omega_d \frown [D]),$$

où ω_d est le dual de Poincaré de ω .

Notons encore $i_*: H_0(D) \rightarrow H_0(X)$ l'application induite par i . Il faut vérifier l'égalité dans $H_0(X)$ de $(i_*[D])_d \frown \omega$ et de $i_*(i^*\omega_d \frown [D])$, mais par naturalité du produit cap [5, Chap. VII, n° 12.6], on a $i_*(i^*\omega_d \frown [D]) = \omega_d \frown i_*[D]$. En utilisant ensuite la formule d'associativité du produit cap [5, Chap. VII, n° 12.7] et le fait que ω et $\omega' := i_*[D]$ sont de dimension paire, on voit facilement que $\omega'_d \frown \omega = \omega_d \frown \omega'$, ce qui montre (13).

Dans le cas général (X non compact), on plonge X comme ouvert dans une variété complète \tilde{X} que l'on peut supposer lisse par le théorème de désingularisation de Hironaka [9]. On vérifie ensuite la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc} \text{Div}(\tilde{X}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \xrightarrow{\tilde{c}} & H^2(\tilde{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \xrightarrow{c} & H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}), \end{array}$$

où les homomorphismes verticaux sont induits par l'inclusion $X \subset \tilde{X}$, celui de gauche étant surjectif. Comme \tilde{X} est compact, on peut appliquer le raisonnement ci-dessus à \tilde{c} . On en déduit que \tilde{c} et donc c sont induits par la première classe de Chern. \square

§ 5. APPLICATION À LA CONSTRUCTION D'ALGÈBRES SIMPLES

On a vu que pour un corps de fonctions complexes K et pour une variété algébrique lisse X avec $\mathbf{C}(X) = K$, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{a} \chi(K) \xrightarrow{b} \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{c} H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Problème 5.1. Soient $f \in \mathcal{P}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$ un polynôme unitaire irréductible, ξ une racine de f engendrant l'extension K de $\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n)$ et X une variété algébrique lisse avec $\mathbf{C}(X) = K$.

Etant donné $\delta \in \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ tel que $c(\delta) = 0$, on aimerait décrire tous les relevés de δ par b et les éléments de $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_{n+1}))$ leur correspondant par l'isomorphisme (5).

On va résoudre ce problème en explicitant l'homomorphisme b (lemme 5.2 ci-dessous). Par contre, la méthode de calcul de a qu'on peut déduire de la démonstration du théorème 3.1 (point 4, avec $\Delta = \emptyset$) n'est pas très explicite. Nous comparerons les deux descriptions de $\text{Im } a = \text{Ker } b$ en fin de paragraphe.

LEMME 5.2. Soit $\varphi \in \chi(K)$. Notons $L = \bar{K}^{\text{Ker } \varphi}$ et θ le générateur de $\text{Gal}(L/K)$ tel que $\varphi(\theta) = 1/m \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Soit $\kappa \in K$ tel que $L = K(\sqrt[m]{\kappa})$ et $\theta(\sqrt[m]{\kappa}) = e^{-2\pi i/m} \cdot \sqrt[m]{\kappa}$. Alors $b(\varphi) = (\kappa) \otimes 1/m \in \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, où (κ) est le diviseur de κ .

Démonstration. D'après la définition de b , il faut d'abord calculer l'image de φ dans $\lim_{D \in \mathcal{V}(X)} H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ par l'isomorphisme F du théorème 3.1. On va voir qu'on peut représenter $F(\varphi)$ dans $H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ pour D le support du diviseur (κ) , puis on va exprimer son représentant $\pi^*(\varphi)$ en terme de κ . Il faudra ensuite revenir à la démonstration du théorème 4.1 pour calculer $b(\varphi)$ à partir de $\pi^*(\varphi)$.

1) *Choix de $D \in \mathcal{V}(X)$:* Notons (Y, ν) la normalisation de X dans L et $D \in \mathcal{V}(X)$ le support de (κ) . On montre que D contient la ramification de ν .

Soit U un ouvert affine quelconque de $X - D$. Considérons la sous-variété affine V de $U \times \mathbf{C}$ définie par

$$(14) \quad V = \{(x, \zeta) \in U \times \mathbf{C} \mid \zeta^m = \kappa(x)\}.$$

L'anneau $C[V] = (C[U])[T]/(T^m - \kappa)$ est de type fini sur $C[U]$ et $C(V) = L$. De plus, V est lisse et donc normale. En effet, la première projection $p_1: V \rightarrow U$ est un revêtement topologique non ramifié et U est lisse. Donc V est analytiquement (et par conséquent algébriquement) lisse. Ceci montre que (V, p_1) est isomorphe à la normalisation de U dans L et que v est non ramifié au-dessus de U .

2) Calcul de $\pi^*(\varphi) \in H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$: Notons $W = X - D$, $Z = Y - v^{-1}(D)$ et définissons comme en (8) $\pi: H_1(W) \rightarrow \text{Gal}(L/K)$. On va calculer explicitement $\pi^*(\varphi) \in \text{Hom}(H_1(W), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

Considérons le diagramme commutatif

$$(15) \quad \begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{\lambda} & \mathbf{C} & \ni & \zeta \\ v \downarrow & & e \downarrow & & \downarrow \\ W & \xrightarrow{\kappa} & \mathbf{C} & \ni & \zeta^m \end{array}$$

où $\lambda := \sqrt[m]{\kappa} \in L$. En utilisant l'orientation naturelle de \mathbf{C} , on identifie $H_1(\mathbf{C})$ à $\frac{1}{m}\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ et on définit $\psi: H_1(W) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ comme la composition

$$H_1(W) \xrightarrow{\kappa_*} H_1(\mathbf{C}) = \frac{1}{m}\mathbf{Z} \rightarrow \frac{1}{m}\mathbf{Z}/\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

On va voir que $\pi^*(\varphi) = \psi$.

On a $\text{Ker}\psi = v_*H_1(Z)$. En effet, l'inclusion $v_*H_1(Z) \subset \text{Ker}\psi$ est claire, car d'après (15), $\kappa_*(v_*H_1(Z)) = e_*(\lambda_*H_1(Z)) \subset mH_1(\mathbf{C}) = \mathbf{Z}$. Réciproquement, soit $\omega \in \text{Ker}\psi$, qu'on représente par un lacet l en un point $x \in W$, et soit $y \in v^{-1}(x)$. En remarquant que sur l'ouvert V de (14) λ coïncide avec la seconde projection $p_2: V \rightarrow \mathbf{C}$, on voit que dans (15), λ est bijective sur les fibres. Ainsi, tout comme le relevé de $\kappa(l)$ en $\lambda(y)$ (par l'hypothèse $\omega \in \text{Ker}\psi$), le relevé de l en y est un lacet et donc $\omega \in v_*H_1(Z)$.

Comme $\text{Ker}(\pi^*(\varphi)) = v_*H_1(Z)$ également, on sait déjà que $\pi^*(\varphi)$ et ψ coïncident à un automorphisme de $\frac{1}{m}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ près. Ils sont en fait égaux: en effet, en choisissant $\omega \in H_1(W)$ tel que $\psi(\omega) = 1/m$, on va montrer que $\pi(\omega) = \theta \in \text{Gal}(L/K)$, d'où $\pi^*(\varphi) = \psi$, car $\varphi(\theta) = 1/m$. Soit l un lacet en x représentant ω et soit $y \in v^{-1}(x)$. Si l'on note σ l'automorphisme de Z induit par ω , c'est-à-dire l'image de ω par la surjection $H_1(W) \rightarrow \text{Aut}_W(Z)$ de (7), le relevé \tilde{l} de l joint y à $\sigma(y)$ et se projette sur $\lambda(\tilde{l})$ allant de $\lambda(y)$ à $\lambda(\sigma(y))$. D'autre part, $\lambda(\tilde{l})$ qui est le relevé de $\kappa(l)$ en $\lambda(y)$ a pour extrémité $e^{2\pi i/m} \cdot \lambda(y)$. Ainsi, d'après la définition de l'isomorphisme du corol-

laire 2.3, $\pi(\omega) = \theta \in \text{Gal}(L/K)$, car $\pi(\omega)$ envoie λ sur $\lambda \circ \sigma^{-1} = e^{-2\pi i/m} \cdot \lambda = \theta(\lambda)$.

3) *Calcul de $b(\varphi) \in \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$* : Par définition, $b(\varphi)$ est représenté par $\beta^*(\pi^*(\varphi)) \in \bigoplus_{\Delta \in \mathcal{C}(D)} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \varepsilon_{\Delta} \hookrightarrow \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ où β^* est le dual de l'homomorphisme $\beta: H_0(D_r) \rightarrow H_1(X-D)$ de (11). Rappelons aussi que $\beta = \partial \circ \tau$, où ∂ est l'opérateur bord et τ l'isomorphisme de Thom (10).

Soit $\Delta \in \mathcal{C}(D)$, déterminant l'élément η_{Δ} de $H_0(D_r)$. Comme géométriquement $\tau(\eta_{\Delta})$ peut être représenté par un petit disque transverse à Δ , $\beta(\eta_{\Delta}) = \hat{c}(\tau(\eta_{\Delta}))$ peut l'être par un petit lacet l autour de Δ , dont l'orientation dépend des conventions. On les fixe maintenant de sorte que $\kappa(l)$ représente $\text{ord}_{\Delta}(\kappa)$ fois le générateur naturel de $H_1(\mathbf{C})$. En utilisant que $\pi^*(\varphi) = \psi$ et que ε_{Δ} est le dual de η_{Δ} , on voit alors que $\beta^*(\pi^*(\varphi)) = \psi \circ \beta = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}(D)} [\text{ord}_{\Delta}(\kappa)/m] \varepsilon_{\Delta}$. Donc $b(\varphi) = (\kappa) \otimes 1/m \in \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. \square

Solution du problème 5.1. Soit $f \in \mathcal{P}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$ un polynôme unitaire irréductible, ξ une racine de f engendrant l'extension K de $\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n)$ et X une variété algébrique lisse avec $\mathbf{C}(X) = K$. Soit $\delta \in \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ tel que $c(\delta) = 0$ dans $H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Alors toutes les classes d'algèbres simples centrales sur $\mathbf{C}(t_1, \dots, t_{n+1})$ correspondant à des relevés de δ dans $\chi(K)$ s'obtiennent de la façon suivante:

Comme $c(\delta) = 0$, δ est dans l'image de b . Par le lemme 5.2, il s'écrit donc (de plusieurs manières!) $\delta = (\kappa) \otimes 1/m$, où (κ) est le diviseur de $\kappa \in K$. Choisissons une écriture $\delta = (\kappa) \otimes 1/m$ qu'on peut supposer réduite, i.e. telle que si $(\kappa) = k \cdot (\kappa')$ et $k \mid m$, alors $k = 1$. Ce choix détermine un relevé $\varphi \in \chi(K)$ de δ . En effet, $L := K(\sqrt[m]{\kappa})$ est une extension cyclique de degré m de K et si θ est le générateur de $\text{Gal}(L/K)$ tel que $\theta(\sqrt[m]{\kappa}) = e^{-2\pi i/m} \cdot \sqrt[m]{\kappa}$, on peut définir $\varphi: \text{Gal}(L/K) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ par $\varphi(\theta) = 1/m$. Le lemme 5.2 montre que $b(\varphi) = \delta$. Par la remarque A.2, il correspond à φ dans $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_{n+1}))$ la classe d'algèbres simples $\text{cor}(L(t_{n+1})/K(t_{n+1}), \theta, t_{n+1} - \xi)$, où $\text{cor}: \text{Br}(K(t_{n+1})) \rightarrow \text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_{n+1}))$ est la corestriction.

Remarque 5.3. Dans le cas où X est projective, on peut voir directement que $\delta \in \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ s'écrit $\delta = (\kappa) \otimes 1/m$ lorsque $c(\delta) = 0$. En effet, en écrivant $\delta = D \otimes 1/m$ avec $D \in \text{Div}(X)$, on va montrer comment obtenir un diviseur principal en ajoutant à D un diviseur multiple de m . Mais faisons d'abord quelques rappels (voir [3, § 6; 11]).

- (i) On peut définir c_1 comme l'homomorphisme de connexion $c_1: H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(X, \mathbf{Z})$ de la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de l'exponentielle $0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow 1$, où \mathcal{O} , resp. \mathcal{O}^* , est le faisceau

des germes de fonctions holomorphes, resp. holomorphes non nulles, sur X .

- (ii) Considérons $\rho: H^2(X, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbf{R})$ induit par l'inclusion $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ et notons $H^2_{(1,1)}(X, \mathbf{R})$ le sous-espace de $H^2(X, \mathbf{R})$ des classes représentables par des formes différentielles de type (1, 1) (via l'isomorphisme de de Rham $H^2(X, \mathbf{R}) \simeq H^2_{DR}(X)$). On a alors l'égalité

$$c_1(H^1(X, \mathcal{O}^*)) = \rho^{-1}(H^2_{(1,1)}(X, \mathbf{R}))$$

entre sous-groupes de $H^2(X, \mathbf{Z})$.

- (iii) Comme X est projective, $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ est isomorphe au groupe des classes de diviseurs de X . En faisant l'abus de noter (comme précédemment) $c_1: \text{Div}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbf{Z})$, on déduit $c_1(\text{Div}(X)) = \rho^{-1}(H^2_{(1,1)}(X, \mathbf{R}))$ de (ii).

Démonstration de la remarque 5.3.

- 1) Soit $\delta = D \otimes 1/m \in \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ tel que $c(\delta) = 0$. On montre qu'on peut supposer $c_1(D) = 0$.

L'hypothèse $c(\delta) = 0 \in H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ signifie que $c_1(D)$ est divisible par m dans $\text{Hom}(H_2(X), \mathbf{Z})$. Quitte à amplifier $D \otimes 1/m$ (i.e. multiplier D et m par un même entier), on peut supposer $c_1(D)$ divisible par m dans $H^2(X, \mathbf{Z})$, car $\text{Ker}\{H^2(X, \mathbf{Z}) \rightarrow \text{Hom}(H_2(X), \mathbf{Z})\}$ est de torsion.

On a donc $c_1(D) = m \cdot \eta$, pour $\eta \in H^2(X, \mathbf{Z})$. D'après (iii), $\rho(\eta) = \frac{1}{m} \cdot \rho(c_1(D))$ est dans l'espace $H^2_{(1,1)}(X, \mathbf{R})$ et il existe un diviseur D' tel que $\eta = c_1(D')$. On peut donc écrire $\delta = (D - mD') \otimes 1/m$ avec $c_1(D - mD') = 0$.

- 2) Supposons $\delta = D \otimes 1/m$ avec $c_1(D) = 0$. On veut modifier D en un diviseur principal. D'après (i), c_1 s'insère dans la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathbf{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbf{Z}).$$

En utilisant (iii), on voit ainsi que le groupe des classes de diviseurs dont la première classe de Chern est nulle est isomorphe au groupe $H^1(X, \mathcal{O})/H^1(X, \mathbf{Z})$ qui est divisible. Donc il existe un diviseur D' tel que D est linéairement équivalent à mD' ; autrement dit $D - mD'$ est principal. \square

Remarque 5.4. Le sous-groupe $\text{Im} a = \text{Ker} b$ de $\chi(K)$ est isomorphe au groupe des classes de diviseurs de torsion.

En effet, si $\varphi \in \text{Ker} b$, on peut regarder φ comme un relevé par b de $\delta = 0$, provenant d'une écriture réduite $0 = (\kappa) \otimes 1/m$. On en déduit que $(\kappa) = m \cdot D$ pour un diviseur D dont la classe $[D]$ est d'ordre m . On vérifie facilement que la correspondance $\varphi \mapsto [D]$ donne l'isomorphisme annoncé en remarquant que deux écritures réduites $(\kappa) \otimes 1/m$ et $(\kappa') \otimes 1/m'$

déterminent le même élément de $\chi(K)$ si et seulement si $m' = m$ et κ' diffère de κ par une puissance m -ième.

On peut aussi faire le lien avec l'homomorphisme a . Soit $\psi \in H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. On calcule $a(\psi) \in \chi(K)$ par la méthode de la démonstration du théorème 3.1 (point 4). Si m est l'ordre de ψ , on construit un morphisme algébrique fini $v: Y \rightarrow X$ qui est un revêtement topologique non ramifié ($\Delta = \emptyset$) à m feuillets. Le corps $L := \mathbf{C}(Y)$ est une extension cyclique de degré m de K et $a(\psi) \in \chi(K)$ provient d'un isomorphisme $\text{Gal}(L/K) \xrightarrow{\sim} \frac{1}{m} \mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ induit par ψ . Si $\kappa \in K$ est tel que $L = K(\sqrt[m]{\kappa})$, en utilisant cette fois que v est non ramifié, on peut montrer que $(\kappa) = m \cdot D$ pour un diviseur D dont la classe $[D]$ est d'ordre m .

Remarquons pour terminer que cette construction ne fournit pas une description des classes de diviseurs de torsion (qu'il serait certainement très intéressant d'avoir!).

§ 6. DIVISIBILITÉ DE $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$

Auslander et Brumer ont prouvé [1] que si F est un corps de fractions rationnelles à une variable à coefficients dans un corps quelconque, alors soit $\text{Br}(F)$ contient un sous-groupe divisible non trivial, soit $2 \cdot \text{Br}(F) = 0$ (voir aussi [2]). On va montrer que pour tout n , $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$ est entièrement divisible.

Pour tout corps de fonctions complexes K , on va établir que le groupe $\chi(K)$ est divisible en appliquant le théorème 4.1 à un modèle particulier X de K : on va choisir une variété algébrique lisse X avec $\mathbf{C}(X) = K$ telle que $H_1(X)$ soit libre. (Il serait aussi possible de raisonner directement sur $\chi(K)$ en séparant chaque composante p -primaire.)

Pour démontrer l'existence d'un modèle adéquat de K , on aura besoin de deux propriétés élémentaires de la première classe de Chern

$$c_1: \text{Div}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbf{Z})$$

que l'on établit immédiatement.

LEMME 6.1. *Soit X une variété algébrique projective complexe lisse. Alors (i) l'image $c_1(\text{Div}(X))$ de c_1 contient le sous-groupe de torsion $\text{Tors}(H^2(X, \mathbf{Z}))$ et (ii) on a une décomposition $H_2(X) = N \oplus L$, où N est le sous-groupe de $H_2(X)$ annulé par l'évaluation de $c_1(\text{Div}(X))$ et où L est libre.*

Démonstration. On a déjà rappelé (remarque 5.3 (iii)) que la première classe de Chern est définie à partir de la suite exacte $H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(X, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O})$ et de l'application $\text{Div}(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*)$ qui est surjective lorsque X est projective.

Ainsi le conoyau de $c_1: \text{Div}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbf{Z})$ se plonge dans l'espace vectoriel $H^2(X, \mathcal{O})$ et est sans torsion. On en tire immédiatement le point (i), ainsi que l'existence d'un complément direct libre au sous-groupe $c_1(\text{Div}(X))$ de $H^2(X, \mathbf{Z})$. On peut alors déduire la décomposition voulue de $H_2(X)$ au moyen de la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Tors}(H_2(X)) \rightarrow H_2(X) \rightarrow \text{Hom}(H^2(X, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) \rightarrow 0.$$

$$\sigma \mapsto [\eta \mapsto \langle \eta; \sigma \rangle] \quad \square$$

Pour tout $D \in \mathcal{V}(X)$, notons $\mathcal{L}(D)$ le sous-groupe $\bigoplus_{\Delta \in \mathcal{C}(D)} \mathbf{Z}\Delta$ de $\text{Div}(X)$.

PROPOSITION 6.2. *Soit X une variété algébrique projective complexe lisse et soit $D \in \mathcal{V}(X)$ tel que $c_1(\mathcal{L}(D)) = c_1(\text{Div}(X))$ comme sous-groupes de $H^2(X, \mathbf{Z})$. Alors $H_1(X - D)$ est libre.*

Démonstration. On exprime le rapport entre $H_1(X)$ et $H_1(X - D)$ par la suite exacte d'homologie de $(X, X - D)$:

$$H_2(X) \xrightarrow{j_*} H_2(X, X - D) \xrightarrow{\partial} H_1(X - D) \xrightarrow{k_*} H_1(X),$$

où j_* et k_* sont induits par $j: (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, X - D)$ et $k: X - D \hookrightarrow X$, ∂ étant l'homomorphisme bord. On va montrer que $H_2(X, X - D)/j_*H_2(X)$ est sans torsion, puis en déduire que $H_1(X - D)$ est libre.

1) $H_2(X, X - D)/j_*H_2(X)$ est sans torsion: On a vu (démonstration du théorème 4.1) que $H_2(X, X - D)$ est isomorphe au groupe libre $\bigoplus_{\Delta \in \mathcal{C}(D)} \mathbf{Z}\eta_\Delta$ sur les composantes de D et que l'application j_* devient $\gamma: H_2(X) \rightarrow \bigoplus_{\Delta \in \mathcal{C}(D)} \mathbf{Z}\eta_\Delta$ dont le dual est donné par la première classe de Chern. Par conséquent, si $\sigma \in H_2(X)$ on a

$$\gamma(\sigma) = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}(D)} \langle c_1(\Delta); \sigma \rangle \eta_\Delta.$$

Soit donc $\tau \in \bigoplus_{\Delta \in \mathcal{C}(D)} \mathbf{Z}\eta_\Delta$ tel que $m \cdot \tau \in \gamma H_2(X)$, avec m minimal. On doit montrer que $\tau \in \gamma H_2(X)$, c'est-à-dire que $m = 1$. Par hypothèse, il existe $\sigma \in H_2(X)$ tel que $\gamma(\sigma) = m \cdot \tau$ et donc tel que $m \mid \langle c_1(\Delta), \sigma \rangle$ pour tout $\Delta \in \mathcal{C}(D)$. En décomposant $H_2(X) = N \oplus L$ selon le lemme 6.1, on voit qu'on peut supposer que $\sigma \in L$ puisque l'évaluation de $c_1(\text{Div}(X))$ est nulle sur N .

Il résulte aussi du lemme 6.1 que l'évaluation est un isomorphisme de L sur le dual de $c_1(\text{Div}(X)) = c_1(\mathcal{L}(D))$. Ainsi, $\langle -; \sigma \rangle$ est un élément pur

de $\text{Hom}(c_1(\mathcal{L}(D)), \mathbf{Z})$ puisque σ est pur dans L par minimalité de m . Il existe donc $D_\sigma \in \mathcal{L}(D)$ tel que $\langle c_1(D_\sigma); \sigma \rangle = 1$. Comme $m \mid \langle c_1(\Delta); \sigma \rangle$ pour tout $\Delta \in \mathcal{C}(D)$, on a aussi $m \mid \langle c_1(D_\sigma); \sigma \rangle = 1$. Donc $m = 1$ et $H_2(X, X - D)/j_*H_2(X) \simeq \bigoplus_{\Delta \in \mathcal{C}(D)} \mathbf{Z}\eta_\Delta/\gamma H_2(X)$ est sans torsion.

2) $H_1(X - D)$ est libre: Soit ω un 1-cycle de $X - D$ dont la classe $[\omega] \in H_1(X - D)$ est de torsion, d'ordre m . On va montrer que $m = 1$ et donc que $[\omega] = 0$.

Comme $\text{Ker}\{k_*: H_1(X - D) \rightarrow H_1(X)\}$ est sans torsion par le point 1, la restriction de k_* à la torsion $\text{Tors}(H_1(X - D)) \rightarrow \text{Tors}(H_1(X))$ est injective. La classe $k_*[\omega] \in H_1(X)$ de ω est donc aussi d'ordre m et il existe une 2-chaîne σ de X dont le bord est $m \cdot \omega$. Notons $[\sigma] \in H_2(X, X - D)$ sa classe. Par construction, $\partial[\sigma] = m \cdot [\omega] = 0$ dans $H_1(X - D)$, d'où $[\sigma] \in j_*H_2(X)$. On va montrer que $m = 1$ en construisant une forme linéaire $\lambda: H_2(X, X - D) \rightarrow \mathbf{Z}$ nulle sur $j_*H_2(X)$ et telle que $\lambda[\sigma] \equiv 1 \pmod{m}$.

On choisit une décomposition du groupe des 2-chaînes de X en $\mathbf{Z}\sigma \oplus M$, de sorte que M contienne tous les 2-cycles de X , et on définit un 2-cocycle η valant 1 sur σ et s'annulant sur M . Sa classe $[\eta] \in H^2(X, \mathbf{Z})$ est de torsion (d'ordre m si ω est pur), donc par le lemme 6.1, $[\eta] \in c_1(\text{Div}(X)) = c_1(\mathcal{L}(D))$.

Soit $D_0 \in \mathcal{L}(D)$ tel que $c_1(D_0) = [\eta]$. L'évaluation de la classe $c_1(D_0)$ sur σ n'est pas bien définie dans les entiers, mais seulement dans les entiers modulo m — puisque $\partial\sigma = m \cdot \omega$ — et on a $c_1(D_0)(\sigma) \equiv \eta(\sigma) \equiv 1 \pmod{m}$. On va voir que l'évaluation de $c_1(D_0)$ provient d'une forme sur $H_2(X, X - D)$ qui est la forme λ cherchée.

Soit V un voisinage tubulaire fermé de D dans X , d'intérieur \mathring{V} . En utilisant que D , respectivement $X - D$, a le même type d'homotopie que V , respectivement $X - \mathring{V}$, ainsi que la dualité de Poincaré $H^2(V, \partial V) \simeq H_{2n-2}(V)$ donnée par $\frown [V, \partial V]$, on peut déduire une dualité $H^2(X, X - D) \simeq H_{2n-2}(D)$, où n est la dimension complexe de X . Elle est compatible avec la dualité de Poincaré dans X ; plus précisément, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^2(X, X - D) & \simeq & H_{2n-2}(D) \\ j^* \downarrow & & \downarrow i_* \\ H^2(X) & \simeq & H_{2n-2}(X) \end{array}$$

commute, avec i_* induit par l'inclusion $i: D \hookrightarrow X$. (On le vérifie en utilisant la naturalité du produit cap et le fait que la classe fondamentale $[V, \partial V]$ de V provient de celle de X .) Comme la première classe de Chern est

donnée par la dualité de Poincaré, si $\Delta \in \mathcal{C}(D)$, on a $c_1(\Delta) = (i_*[\Delta])_d$. On voit ainsi que $c_1: \mathcal{L}(D) \rightarrow H^2(X)$ se factorise par $H^2(X, X-D)$. On a donc un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(D) & \xrightarrow{d_1} & H^2(X, X-D) \\ \downarrow & & \downarrow j^* \\ \text{Div}(X) & \xrightarrow{c_1} & H^2(X) \end{array}$$

On peut maintenant définir $\lambda: H_2(X, X-D) \rightarrow \mathbf{Z}$ comme l'évaluation de $d_1(D_0)$ pour notre $D_0 \in \mathcal{L}(D)$. On a bien que $\lambda[\sigma] \equiv c_1(D_0)(\sigma) \equiv 1 \pmod{m}$ et que $\lambda \circ j_* = 0$, car c'est l'évaluation de $j^*(d_1(D_0)) = c_1(D_0) = [\eta]$, or η est nul sur les 2-cycles (par construction). Comme $[\sigma] \in j_*H_2(X)$, on en tire que $m = 1$, d'où $\text{Tors}(H_1(X-D)) = 0$, autrement dit $H_1(X-D)$ est libre. \square

On peut maintenant établir le résultat principal de ce paragraphe.

THÉORÈME 6.3. *Le groupe $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$ est divisible pour tout n .*

Démonstration. On fait une récurrence sur n et on montre que tous les sommands directs $\chi(K)$ intervenant dans la décomposition (5) de $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$ sont divisibles.

Soit donc K un corps de fonctions complexes. On peut trouver une variété algébrique projective lisse \tilde{X} avec $\mathbf{C}(\tilde{X}) = K$ par le théorème de désingularisation de Hironaka et une sous-variété $D \in \mathcal{V}(\tilde{X})$ telle que $c_1(\mathcal{L}(D)) = c_1(\text{Div}(\tilde{X}))$ en utilisant que le groupe $H^2(\tilde{X}, \mathbf{Z})$ est de type fini. Posons $X = \tilde{X} - D$. Le groupe $H_1(X)$ est libre par la proposition 6.2.

On traite le groupe $\chi(K)$ au moyen de la suite exacte du théorème 4.1 appliqué à X

$$(16) \quad 0 \rightarrow H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow \chi(K) \xrightarrow{b} \text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{c} H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Par le choix de X , le groupe $H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \text{Hom}(H_1(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est divisible. Il suffit de montrer qu'il en est de même de $\text{Im} b$. Soient $\delta \in \text{Im} b$ et l un entier. Par le lemme 5.2, δ est de la forme $D \otimes 1/m$ avec D un diviseur principal. On a donc $c_1(D) = 0$ et $l \cdot (D \otimes 1/m) = \delta$ avec $D \otimes 1/m \in \text{Ker} c = \text{Im} b$. \square

On déduit immédiatement de la classification des groupes abéliens divisibles le

COROLLAIRE 6.4. *Quel que soit l'entier $n \geq 2$, le groupe $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$ est abstraitement isomorphe à une somme directe de copies de \mathbf{Q}/\mathbf{Z} indicées par un ensemble équipotent à \mathbf{C} .*

On obtient donc que pour $n \geq 2$, les groupes $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$ sont tous isomorphes entre eux, ce qui est analogue au phénomène observé par Fein et Schacher [7] dans le cas des corps de fractions rationnelles à coefficients dans des corps globaux.

La proposition 6.2 permet aussi d'exprimer $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$ en une seule formule, peut-être plus agréable, mais « moins canonique » que le reste de notre calcul. Introduisons pour cela les notations $\text{Div}_0(X)$ pour le groupe des diviseurs de X dont la première classe de Chern est nulle et \mathcal{P}_n pour l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{P}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_i))$ des polynômes unitaires irréductibles à coefficients dans un corps $\mathbf{C}(t_1, \dots, t_i)$ pour $1 \leq i < n$.

THÉORÈME 6.5.

- (i) *Pour tout $f \in \mathcal{P}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_i))$, il existe une variété algébrique X_f lisse avec $H_1(X_f)$ libre et $\mathbf{C}(X_f)$ isomorphe à l'extension de $\mathbf{C}(t_1, \dots, t_i)$ obtenue en adjoignant une racine de f .*
- (ii) *On a un isomorphisme*

$$\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n)) \simeq \bigoplus_{f \in \mathcal{P}_n} \{H^1(X_f, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \oplus \text{Div}_0(X_f) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\}.$$

Démonstration. Pour tout $f \in \mathcal{P}_n$, on trouve X_f de même manière que X dans la démonstration du théorème 6.3. Comme $H^1(X_f, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est divisible, la suite exacte (16) est scindée (mais pas de manière canonique!), ce qui donne l'isomorphisme annoncé. □

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AUSLANDER, M. and A. BRUMER. Brauer groups of discrete valuation rings. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, 71 (1968); *Indag. Math.* 30 (3) (1968), 286-296.
- [2] BRUMER, A. and M. ROSEN. On the size of the Brauer group. *Proc. Amer. Math. Soc.* 19 (3) (1968), 707-711.
- [3] CHERN, S. S. *Complex manifolds without potential theory*. 2^e éd., Springer (1979) (Universitext.)
- [4] COHEN, M. M. *A course in simple homotopy theory*. Springer (1973) (Graduate texts in mathematics No. 10.)
- [5] DOLD, A. *Lectures on algebraic topology*. Springer (1972) (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 200.)

- [6] FADDEEV, D. K. Simple algebras over a field of algebraic functions of one variable. *Trudy Mat. Inst. Stklov* 38 (1951), 321-344; *Amer. Mat. Soc. Transl. Ser. II*, 3 (1956), 15-38.
- [7] FEIN, B. and M. SCHACHER. Brauer groups of rational function fields over global fields. *Lecture notes in math.* 844, 46-74, Springer (1981).
- [8] HARTSHORNE, R. *Algebraic geometry*. Springer (1977) (Graduate texts in mathematics No. 52.)
- [9] HIRONAKA, H. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. *Annals of Math.* 79 (1964).
- [10] ———. Triangulations of algebraic sets. In *Algebraic Geometry, Arcata 1974*, *Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math.* 29 (1975), 165-185.
- [11] KODAIRA, K. and D. C. SPENCER. Groups of complex line bundles over compact Kähler varieties and Divisor class groups on algebraic varieties. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 39 (1953), 868-877.
- [12] MUMFORD, D. *Introduction to algebraic geometry*. Preliminary version of first 3 Chapters.
- [13] NAGATA, M. Imbedding of an abstract variety in a complete variety. *J. Math. Kyoto Univ.* 2 (1962), 1-10.
- [14] PIERCE, R. S. *Associative algebras*. Springer (1982) (Graduate texts in mathematics No. 88.)
- [15] RAYNAUD, M. Géométrie algébrique et géométrie analytique. Dans *SGA1, Lecture notes in math.* n° 224, 311-343, Springer (1971).
- [16] RIEHM, C. The corestriction of algebraic structures. *Invent. math.* 11 (1970), 73-98.
- [17] SERRE, J. P. Revêtements ramifiés du plan projectif. *Sém. Bourbaki* n° 204 (1959/60).
- [18] SHAFAREVICH, I. R. *Basic algebraic geometry*. Springer (1974) (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 213.)
- [19] WEISS, E. *Cohomology of groups*. Academic Press (1969).
- [20] ZARISKI, O. On the purity of the branch locus of algebraic functions. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 44 (1958), 791-796.
- [21] ZARISKI, O. and P. SAMUEL. *Commutative algebra, volume I*. Springer (1959) (Graduate texts in mathematics No. 28.)

(Reçu le 27 septembre 1983)

Philippe A. J. Steiner

Section de Mathématiques, Université de Genève
Case postale 240
CH — 1211 Genève 24