§3. Présentation du groupe de Witt hermitien d'un corps gauche

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1983)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Remarque. Le choix d'un $b \in Hom_A(U_i, U_i^*)$ de la proposition 7 pour obtenir une involution sur D_i est en fait irrelevant : deux choix différents peuvent donner lieu à des involutions non isomorphes mais aux mêmes groupes de Witt, puisque tous deux sont isomorphes à $W_\varepsilon(Ae_i)$ si $i \leqslant s$, à $W_{-\varepsilon}(Ae_i)$ si $s < i \leqslant r$.

§ 3. Présentation du groupe de Witt hermitien d'un corps gauche

Soit D un corps gauche muni d'une involution qui n'est pas forcément l'identité sur le centre et $WH_\varepsilon(D, {}^-)$ le groupe de Witt des ε-formes hermitiennes. (Définition au § 2.)

Si $a \in D^{\cdot}_\varepsilon = \{x \in D^{\cdot} \mid \bar{x} = \varepsilon x\}$, $< a >$ désigne le D espace vectoriel à gauche de dimension un De, muni de la forme ε-hermitienne $e \cdot e = a$.

Au corollaire 6 nous avons montré que l'homomorphisme de groupes abéliens φ défini par :

$$\varphi : \mathbf{Z}[D^{\cdot}_\varepsilon] \to WH_\varepsilon(D, {}^-)$$
$$[a] \mapsto < a >$$

est surjectif. $\mathbf{Z}[D^{\cdot}_\varepsilon]$ désigne le groupe abélien libre sur les éléments de $D^{\cdot}_\varepsilon$, notés alors entre crochets.

Théorème 4. *Le noyau de φ est égal au sous groupe N de $\mathbf{Z}[D^{\cdot}_\varepsilon]$ engendré par*

1) $[a] - [xa\bar{x}]$, $\forall a \in D^{\cdot}_\varepsilon$, $\forall x \in D^{\cdot}$
2) $[a] + [-a]$, $\forall a \in D^{\cdot}_\varepsilon$
3) $[a] + [b] - [a+b] - [a(a+b)^{-1}b]$,
   $\forall a, b \in D^{\cdot}_\varepsilon$ avec $a + b \neq 0$.

Ce théorème fournit donc une présentation par générateurs et relations de $WH_\varepsilon(D, {}^-)$.

Nous allons d'abord montrer un résultat intermédiaire.

Proposition 8. *Le noyau de* φ *est égal au sous groupe* P *de* $\mathbf{Z}[D^{\cdot}_{\varepsilon}]$ *engendré par*

1) $[a] - [xa\bar{x}]$, $\forall a \in D^{\cdot}_{\varepsilon}$, $\forall x \in D^{\cdot}$
2) $[a] + [-a]$, $\forall a \in D^{\cdot}_{\varepsilon}$
3) $[a] + [b] - [c] - [d]$, $\forall a, b, c, d \in D^{\cdot}_{\varepsilon}$ tels que $< a > \perp < b > \simeq < c > \perp < d >$.

Puis nous verrons que $P = N$, ce qui achèvera la preuve du théorème 4.

Il est clair que $P \subset \operatorname{Ker} \varphi$: il suffit de remarquer que $< a > \simeq < xa\bar{x} >$, et que $< a > \perp < -a >$ est neutre.

Le fait que $\operatorname{Ker} \varphi \subset P$ repose sur le lemme suivant:

Lemme. Soient $a_1, ..., a_n \in D^{\cdot}_{\varepsilon}$ et supposons que la forme ε-hermitienne $< a_1 > \perp ... \perp < a_n >$ est isotrope (c'est-à-dire il existe un vecteur non nul x avec $x \cdot x = 0$).

Il existe alors $c_1, ..., c_m \in D^{\cdot}_{\varepsilon}$, $m < n$, tels que

$$\sum_1^n [a_i] \equiv \sum_1^m [c_j] \bmod P .$$

Preuve. Si l'on écrit $x = x, e, + ... + x_n e_n$, où e_i est la base de $< a_i >$, $x \cdot x = 0$ se traduit par $x_1 a_1 \bar{x}_1 + ... + x_n a_n \bar{x}_n = 0$.

Eliminons les sommands nuls et renumérotons:

(*): $x_1 a_1 \bar{x}_1 + ... + x_k a_k \bar{x}_k = 0$, avec $k \geqslant 2$ puisque $x \neq 0$.

Si $k = 2$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_1^n [a_i] &= [a_1] - [x_1 a_1 \bar{x}_1] + [x_1 a_1 \bar{x}_1] + [x_2 a_2 \bar{x}_2] \\ &\qquad + [a_2] - [x_2 a_2 \bar{x}_2] + \sum_3^n [a_i] \\ &\equiv \sum_3^n [a_i] \bmod P\end{aligned}$$

et le lemme est démontré.

Supposons par récurrence que le lemme est vrai chaque fois que l'isotropie nous fournit une relation (*) de longueur $k - 1$.

Nous avons $x_1 a_1 \bar{x}_1 + ... + x_k a_k \bar{x}_k = 0$.

Posons $b_1 = x_1 a_1 \bar{x}_1 + x_2 a_2 \bar{x}_2$. Si $b_1 = 0$, l'hypothèse de recurrence dit que le lemme est vrai. Si $b_1 \neq 0$, considérons la forme ε hermitienne

$$< b_1 > \perp < a_3 > \perp \ldots \perp < a_n > .$$

Elle est isotrope avec $b_1 + x_3 a_3 \bar{x}_3 + \ldots + x_k a_k \bar{x}_k = 0$.

Par récurrence, $[b_1] + [a_3] + \ldots + [a_n] \equiv \sum_1^m [c_j] \bmod P$, $m < n - 1$.

Or il existe $b_2 \in D_\varepsilon^\cdot$ avec

$$< a_1 > \perp < a_2 > \simeq < b_1 > \perp < b_2 > ,$$

puisque $< b_1 >$ est un sous espace vectoriel non dégénéré (engendré par $x_1 e_1 + x_2 e_2$) de $< a_1 > \perp < a_2 >$. Il suffit de prendre son orthogonal pour obtenir $< b_2 >$.

Donc

$$[a_1] + [a_2] + \sum_3^n [a_i] \equiv [b_1] + [b_2] + \sum_3^n [a_i] \bmod P ,$$

grâce aux générateurs de type 3) de P.

Mais

$$[b_1] + [b_2] + \sum_3^n [a_i] \equiv [b_2] + \sum_3^m [c_j] \bmod P ,$$

et $m + 1 < n$, puisque l'on avait $m < n - 1$. □

Montrons maintenant Ker $\varphi \subset P$, ce qui prouve la proposition 8.

Si $\lambda = \sum_i n_i [a_i] \in$ Ker φ, écrivons

$$\lambda = \sum_k [U_k] + \sum_j - [V_j] \equiv \sum_k [U_k] + \sum_j [-V_j] \pmod{P} .$$

Il suffit donc de montrer que si $\sum_1^n [a_i] \in$ Ker φ, alors $\sum_1^n [a_i] \equiv 0 \bmod P$.

$\perp_1^n < a_i >$ est neutre, en particulier isotrope. Le lemme dit que

$$\sum_1^n [a_i] \equiv \sum_1^m [c_j] \pmod{P}$$

et avec $m < n$.

Mais $\sum_1^m [c_j]$ est aussi dans le noyau de φ, puisque $P \subset$ Ker φ. Le procédé peut être recommencé, avec les longueurs des expressions diminuant vraiment à chaque application.

D'où $\sum_1^n [a_i] \equiv 0 \pmod{P}$. □

Il nous reste à voir que $N = P$ pour obtenir le théorème 4.

Pour montrer que $N \subset P$, il suffit de voir que les générateurs de type 3) de N sont dans P. En fait ce sont directement des générateurs de type 3) de P, c'est-à-dire:

Assertion. $< a > \perp < b > \simeq < a + b > \perp < a(a+b)^{-1}b >$,
$\forall a, b \in D^{\cdot}_{\varepsilon}$, avec $a + b \neq 0$.

Preuve. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & bc \\ -1 & ac \end{pmatrix}$, où $c = (a+b)^{-1}$. Son inverse est $A' = \begin{pmatrix} ac & -bc \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. En effet,

$$AA' = \begin{pmatrix} ac + bc & 0 \\ 0 & bc + ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A réalise donc une surjection entre deux D-espaces de dimension 2, A est donc aussi injective et $A'A = Id$. Vérifions le quand même:

$$A'A = \begin{pmatrix} ac + bc & bcac - acbc \\ 0 & bc + ac \end{pmatrix}$$

Il est effectivement vrai que $bca - acb = 0$, pour tout $a, b \in D^{\cdot}$ avec $a + b \neq 0$ et $c = (a+b)^{-1}$:

$$\begin{aligned} bca - acb &= bca + bcb - bcb - acb \\ &= b(ca+cb) - (bc+ac)b \\ &= b - b = 0 \,. \end{aligned}$$

Cette matrice A réalise l'isomorphisme entre les deux formes ε-hermitiennes:

$$A^t \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \bar{A} = \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 0 & acb \end{pmatrix}$$

Vérification. $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & cb \\ -1 & ca \end{pmatrix}$ puisque $\overline{bc} = \bar{c}\,\bar{b} = \varepsilon^2\, cb = cb$.

$$A^t\, B\, \bar{A} = \begin{pmatrix} a + b & acb - bca \\ bca - acb & bcacb + acbca \end{pmatrix}$$

En utilisant le fait que $acb = bca$, on obtient bien $\begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 0 & acb \end{pmatrix}$. □

Il s'agit maintenant de montrer que $P \subset N$, problème qui se réduit à montrer que, si $<a> \perp <b> \simeq <c> \perp <d>$, l'expression $[a] + [b] - [c] - [d]$ est nulle modulo N.

Preuve. c est une valeur de la forme $<a> \perp <b>$. Il existe donc x et y non simultanément nuls tels que $c = x\,a\,\bar{x} + y\,b\,\bar{y}$.

Cas 1. Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Nous avons que

$$<a> \perp <b> \perp <-c> \perp <-d>$$

est neutre. Donc

$$<a> \perp <b> \perp <-xa\bar{x} - yb\bar{y}> \perp <-d>$$

est neutre. Mais

$$<a> \simeq <xa\bar{x}> \text{ et } <b> \simeq <yb\bar{y}>$$

Ainsi

(*): $<xa\bar{x}> \perp <yb\bar{y}> \perp <-xa\bar{x} - yb\bar{y}> \perp <-d>$ est neutre.

D'autre part, l'assertion que nous venons prouver nous dit que

$$<xa\bar{x}> \perp <yb\bar{y}> \simeq <xa\bar{x} + yb\bar{y}> \perp <xa\bar{x}(xa\bar{x}+yb\bar{y})^{-1}yb\bar{y}> .$$

(Ce dernier sommand orthogonal sera noté $<g>$.)

En rajoutant $<-xa\bar{x} - yb\bar{y}>$ des deux côtés on obtient

$$<xa\bar{x}> \perp <yb\bar{y}> \perp <-xa\bar{x} - yb\bar{y}> \simeq <xa\bar{x} + yb\bar{y}> \perp$$
$$<-xa\bar{x} - yb\bar{y}> \perp <g>$$

Or $<xa\bar{x} + yb\bar{y}> \perp <-xa\bar{x} - yb\bar{y}>$ est neutre. Par la définition même de l'équivalence de $WH_\varepsilon(D, {}^-)$ on obtient

$$<xa\bar{x}> \perp <yb\bar{y}> \perp <-xa\bar{x} - yb\bar{y}> \sim <g> .$$

En revenant maintenant à (*) on trouve: $<g> \perp <-d>$ est neutre. Ce qui veut dire qu'il existe un vecteur non nul $ue_1 + ve_2$ avec $(ue_1+ve_2)\cdot(ue_1+ve_2) = 0$, c'est-à-dire que

$$ug\bar{u} - vd\bar{v} = 0 \Rightarrow d = v^{-1}ug\overline{uv^{-1}} = sg\bar{s}$$

pour $s = v^{-1}u$.

Nous pouvons maintenant prouver que

$$[a] + [b] - [c] - [d] \equiv 0 \bmod N:$$

$$[a] + [b] - [c] - [d] \equiv [xa\bar{x}] + [yb\bar{y}] - [xa\bar{x} + yb\bar{y}] - [d]$$
$$\equiv [g] - [d] \equiv [g] - [sg\bar{s}] \equiv 0 \pmod{N} .$$

Cas 2. Si $y = 0$. De toute façon $< a > \perp < b > \perp < -c > \perp < -d >$ est neutre, donc

$$< a > \perp < b > \perp < -xa\bar{x} > \perp < -d >$$

est neutre. Or $< a > \perp < -xa\bar{x} >$ est neutre, donc $< b > \perp < -d >$ est neutre et nous venons de voir que dans ce cas il existe s avec $d = sb\bar{s}$. D'où

$$[a] + [b] - [c] - [d] \equiv 0 \,(\bmod N)\,.$$

Cas 3. Si $x = 0$, qui se traite comme le cas 2. □

Exemple. Soit D l'algèbre de quaternions sur un corps k de caractéristique différente de deux, engendré par les éléments i et j vérifiant $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$, $ij = -ji$ où α et β sont des éléments de k qui ne sont pas des carrés,

$$D = k \oplus ki \oplus kj \oplus kij\,.$$

Nous voulons de plus que D soit un corps gauche, c'est-à-dire que la forme bilinéaire de matrice diagonale $< 1, -\alpha, -\beta, \alpha\beta >$ ne représente pas 0.

Soit $^-$ l'involution standard de D: $\bar{i} = -i, \bar{j} = -j$. Cette involution est d'ailleurs définie sans référence à la base de quaternions de D choisie: soit $I = \{z \in D^{\cdot} \mid z^2 \in k$ et $z \notin k\}$, l'ensemble des imaginaires purs. L'involution standard change le signe des imaginaires purs et laisse fixe k.

Il est facile de voir que toute autre involution $\hat{}$ s'obtient de la façon suivante: soit $a \in I$ et complétons le en une base de quaternions, c'est-à-dire en un $b \in I$ avec $ab = -ba$. L'involution est donnée par $\hat{a} = -a, \hat{b} = b$. Deux involutions ainsi construites avec a et $a' \in I$ sont isomorphes si et seulement si les sous corps commutatifs maximaux $k + ka$ et $k + ka'$ sont isomorphes.

Comme le remarque D. W. Lewis, A note on hermitian and quadratic forms, *Bull. Lond. Math. Soc.*, *11* (1979), les formes hermitiennes sur D pour $\hat{}$ sont en bijection avec les formes antihermitiennes sur D pour l'involution standard. (La bijection est donnée par la multiplication par a.) Cela fournit un isomorphisme $WH_{-1}(D, \hat{}) \simeq WH_{+1}(D, {}^-)$. De même $WH_{+1}(D, \hat{}) \simeq WH_{-1}(D, {}^-)$.

La présentation de $WH_\varepsilon(D, {}^-)$ peut être précisée pour D un corps de quaternions:

$$WH_{+1}(D, {}^-) = \mathbf{Z}[k^{\cdot}]/N_1$$

où N_1 est le sous groupe de $\mathbf{Z}[k^{\cdot}]$ engendré par

1) $[a] - [ax\bar{x}], \forall a \in k^{\cdot}, \forall x \in D^{\cdot}$

2) $[a] + [-a], \forall a \in k^{\cdot}$

3) $[a] + [b] - [a+b] - [ab(a+b)]$,
$\forall a, b \in k^{\cdot}$ avec $a + b \neq 0$.

$$WH_{-1}(D, {}^{-}) = \mathbf{Z}[I]/N_{-1}$$

où N_{-1} est le sous groupe de $\mathbf{Z}[I]$ engendré par

1) $[a] - [xa\bar{x}], \forall a \in I, \forall x \in D^{\cdot}$

2) $[a] + [-a], \forall a \in I$

3) $[a] + [b] - [a+b] - [a(a+b)^{-1}b]$,
$\forall a, b \in I$ avec $a + b \neq 0$.

Lorsque $D = H$ le corps des quaternions sur les réels, ($k = \mathbf{R}$, $i^2 = j^2 = -1$), il est clair que $WH_{+1}(H, {}^{-}) = \mathbf{Z}$. (La relation 2 identifie les deux générateurs de $\mathbf{Z}[\mathbf{R}^{\cdot}/\mathbf{R}^{\cdot 2}]$.)

Pour obtenir $WH_{-1}(H, {}^{-})$ il suffit de remarquer que $xi\bar{x}$ décrit tous les imaginaires purs lorsque x parcourt H. Un calcul simple montre que cela revient à trouver deux nombres complexes dont la différence des normes et le produit sont fixés, ce qui est toujours possible.

Ainsi le nombre de générateurs de $WH_{-1}(H, {}^{-})$ est réduit à un, et la relation 2) dit qu'il est d'ordre 2. $WH_{-1}(H, {}^{-}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Si maintenant k est un corps local de caractéristique différente de deux, il est connu qu'il existe un seul corps de quaternions D sur k et que $\{x\bar{x}, x \in D^{\cdot}\} = k^{\cdot}$. Nous en tirons immédiatement que $WH_{+1}(D, {}^{-}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

(Reçu le 3 juin 1982)

Claude Cibils
Section de Mathématique
Université de Genève
Case 124
CH-1211 Genève 24