

2. The Weyl algebra A

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1983)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot X = aX + cY \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot Y = bX + dY \quad (1.1)$$

$$g \cdot X^a Y^b = (g \cdot X)^a (g \cdot Y)^b \quad \text{for } g \in SL_2(\mathbb{C}). \quad (1.2)$$

Each V_m is an $SL_2(\mathbb{C})$ subrepresentation of V .

By $\mathfrak{sl}_2$ we denote the Lie algebra of 2×2 complex matrices with trace 0. The representation of $SL_2(\mathbb{C})$ on V gives rise, through differentiation, to a representation of $\mathfrak{sl}_2$ on V .

$$L \cdot v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tL) \cdot v \quad \text{for } L \in \mathfrak{sl}_2, v \in V. \quad (1.3)$$

Choose a basis E_+, E_-, H of $\mathfrak{sl}_2$ as follows:

$$E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

An easy calculation establishes the following equalities of linear endomorphisms of V .

$$E_+ = X\partial_Y, \quad E_- = Y\partial_X, \quad (1.5)$$

$$H = X\partial_X - Y\partial_Y. \quad (1.6)$$

From (1.5) and (1.6) one easily deduces that each V_m is an *irreducible* representation of $\mathfrak{sl}_2$ (and of $SL_2(\mathbb{C})$).

We define for integers m, n a representation τ of $\mathfrak{sl}_2$ on $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_m, V_n)$ by means of formula (1.7).

$$\begin{aligned} (\tau(L) \cdot T)v &= L(Tv) - T(Lv) \\ \text{for } L \in \mathfrak{sl}_2, T \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_m, V_n), v \in V_m. \end{aligned} \quad (1.7)$$

The principal result of this article is the explicit decomposition of the $\mathfrak{sl}_2$ -representations $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_m, V_n)$.

2. THE WEYL ALGEBRA $\mathcal{A}$

Let $\mathcal{A}$ be the subalgebra of $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ consisting of polynomial differential operators on $V = \mathbb{C}[X, Y]$. The algebra $\mathcal{A}$ is spanned by the elements

$$D(i, j, a, b) = X^i Y^j \partial_X^a \partial_Y^b. \quad (2.1)$$

The Euler operator J , which acts as scalar multiplication by m on V_m , lies in $\mathcal{A}$.

$$J = X\partial_X + Y\partial_Y. \quad (2.2)$$

The next lemma assures us that $\mathcal{A}$ is large enough for the study of all spaces $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(V_m, V_n)$.

LEMMA 2.3. *Let U be a finite dimensional vector subspace of V and let $T \in \text{End}_{\mathbf{C}}(U)$. Then there exists an element of $\mathcal{A}$ whose restriction to U equals T .*

Proof: The element $S = X^c Y^d (\partial_X)^a (\partial_Y)^b \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq a+b}}^N (J-m)$ of $\mathcal{A}$ maps $X^a Y^b$ to a nonzero multiple of $X^c Y^d$ and kills all other monomials of degree at most N . But by enlarging U we may assume that $\text{End}_{\mathbf{C}}(U)$ is spanned by restrictions of elements of the form S . $\square$

We use the inclusion of $\mathfrak{sl}_2$ in $\mathcal{A}$ to define a representation ρ of $\mathfrak{sl}_2$ on $\mathcal{A}$.

$$\rho(L)a = [L, a] \quad \text{for } L \in \mathfrak{sl}_2, a \in \mathcal{A}. \quad (2.4)$$

For integers n let $\mathcal{A}^n$ be the set of T in $\mathcal{A}$ such that $T(V_m) \subset V_{m+n}$ for all m .

This defines a grading of $\mathcal{A}$ which is preserved by the action of $\mathfrak{sl}_2$.

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{A}^n, \quad \mathcal{A}^m \cdot \mathcal{A}^n \subset \mathcal{A}^{m+n}, \quad (2.5)$$

$$\rho(L)\mathcal{A}^n \subset \mathcal{A}^n \quad \text{for all } L \in \mathfrak{sl}_2. \quad (2.6)$$

The algebra $\mathcal{A}$ and representation ρ have been defined just so that the next lemma, which is an immediate consequence of Lemma 2.3, will be true.

LEMMA 2.7. *For each m, n the restriction map*

$$\text{res}: \mathcal{A}^n \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(V_m, V_{m+n})$$

is a surjective homomorphism of $\mathfrak{sl}_2$ representations. $\square$

The method of this paper is to deduce the decomposition of the representations $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(V_m, V_{m+n})$ from the decomposition of the representation ρ on $\mathcal{A}$ by means of Lemma 2.7.