

# 1. SOME REPRESENTATIONS OF \$sl\_2\$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1983)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## THE CLEBSCH-GORDAN FORMULAS

by Daniel FLATH

### 0. INTRODUCTION

The explicit decomposition of tensor products of irreducible representations is of fundamental importance in many applications of representation theory. For finite dimensional representations of the Lie algebra  $\mathfrak{sl}_2$  definitive results are contained in the famous Clebsch-Gordan formulas which are constantly and routinely used by physicists in applying the quantum theory of angular momentum. We give in this article a presentation and derivation of equivalent results, Theorems 5.1 and 5.4.

We shall base a study of the representations  $\text{Hom}(V, W)$  (rather than  $V \otimes W$ ) for irreducible  $\mathfrak{sl}_2$ -representations  $V$  and  $W$  on the analysis of a Weyl algebra  $\mathcal{A}$  of polynomial differential operators in two variables. This point of view is one developed in a recent attack on the Clebsch-Gordan problem for  $\mathfrak{sl}_3$  [2].

The usefulness of the Weyl algebra in the resolution of the Clebsch-Gordan problem is well-known. For years physicists have worked with it under the name "boson calculus" [1]. One mathematical reference is [3]. Nothing in the present article is new except possibly the arrangement of the proofs which has been made with the benefit of experience gained working with  $\mathfrak{sl}_3$ . It seems to me that this arrangement has a naturalness and simplicity to recommend it.

I would like to thank L. C. Biedenharn for interesting discussions on the subject of this paper.

### 1. SOME REPRESENTATIONS OF $\mathfrak{sl}_2$

Let  $V = \mathbf{C}[X, Y]$ , the vector space of polynomials in two variables  $X$  and  $Y$ . For integers  $m$  let  $V_m$  be the subspace of homogeneous polynomials of degree  $m$ , with  $V_m = (0)$  for negative  $m$ .

Let  $SL_2(\mathbf{C})$  act linearly on  $V$  as follows:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot X = aX + cY \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot Y = bX + dY \quad (1.1)$$

$$g \cdot X^a Y^b = (g \cdot X)^a (g \cdot Y)^b \quad \text{for } g \in SL_2(\mathbf{C}). \quad (1.2)$$

Each  $V_m$  is an  $SL_2(\mathbf{C})$  subrepresentation of  $V$ .

By  $\mathfrak{sl}_2$  we denote the Lie algebra of  $2 \times 2$  complex matrices with trace 0. The representation of  $SL_2(\mathbf{C})$  on  $V$  gives rise, through differentiation, to a representation of  $\mathfrak{sl}_2$  on  $V$ .

$$L \cdot v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tL) \cdot v \quad \text{for } L \in \mathfrak{sl}_2, v \in V. \quad (1.3)$$

Choose a basis  $E_+, E_-, H$  of  $\mathfrak{sl}_2$  as follows:

$$E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

An easy calculation establishes the following equalities of linear endomorphisms of  $V$ .

$$E_+ = X\partial_Y, \quad E_- = Y\partial_X, \quad (1.5)$$

$$H = X\partial_X - Y\partial_Y. \quad (1.6)$$

From (1.5) and (1.6) one easily deduces that each  $V_m$  is an *irreducible* representation of  $\mathfrak{sl}_2$  (and of  $SL_2(\mathbf{C})$ ).

We define for integers  $m, n$  a representation  $\tau$  of  $\mathfrak{sl}_2$  on  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(V_m, V_n)$  by means of formula (1.7).

$$\begin{aligned} (\tau(L) \cdot T)v &= L(Tv) - T(Lv) \\ \text{for } L \in \mathfrak{sl}_2, T \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(V_m, V_n), v \in V_m. \end{aligned} \quad (1.7)$$

The principal result of this article is the explicit decomposition of the  $\mathfrak{sl}_2$ -representations  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(V_m, V_n)$ .

## 2. THE WEYL ALGEBRA $\mathcal{A}$

Let  $\mathcal{A}$  be the subalgebra of  $\text{End}_{\mathbf{C}}(V)$  consisting of polynomial differential operators on  $V = \mathbf{C}[X, Y]$ . The algebra  $\mathcal{A}$  is spanned by the elements

$$D(i, j, a, b) = X^i Y^j \partial_X^a \partial_Y^b. \quad (2.1)$$