2. Beweis der Charakterisierungslemmas

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Dieses Lemma zeigt, daß die „Kompliziertheit" der Menge S nicht die von R überschreiten darf, um Modell von GA_2 zu sein. Für $R = \mathbf{R}$ sieht man damit sofort, daß jedes konvexe offene S ein Modell ist.

Im 3. Abschnitt folgern wir aus diesem Zusammenhang dann den folgenden Satz über die Nicht-Charakterisierbarkeit:

SATZ. *Es gibt keine Aussage* ρ *in der Sprache der geordneten Körper mit einem zusätzlichen 2-stelligen Prädikat* S, *die genau die konvexen offenen Teilmengen* $S \subset R^2$ *mit* R *reell abgeschlossen charakterisiert (*d.h. *in* (R, S) *gilt), die Modelle von* GA_2 *sind.*

2. Beweis der Charakterisierungslemmas

Wir bedienen uns in diesem Abschnitt der Ausführungen von Szczerba-Tarski in [S-T$_2$], ohne sie jeweils im einzelnen zu zitieren.

Sei zuerst $S \subset R^2$ offen und konvex, R reell abgeschlossen und in R sei jeder S-definierbare Schnitt realisiert. Von den Axiomen von GA_2 bleibt dann für S lediglich $A\,9$ d.h. C^1 zu zeigen. Es seien also die geometrischen [1]) Formeln $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ gegeben. Unter Ausschluß von trivialen Fällen können wir annehmen, daß φ und ψ zwei nicht-leere Mengen auf einer Geraden durch Punkte $x_0 \neq y_0$ mit $\varphi(x_0)$ und $\psi(y_0)$ definieren. *Für die Koordinaten eines Punktes* $z \in R^2$ *schreiben wir immer* (z', z''). Es ist nun klar, daß das folgende Verfahren unter Benutzung der Parameterdarstellung der Punkte der Geraden durch x_0, y_0 einen S-definierbaren Schnitt auf R beschreibt, dessen Realisierung in R mit der Realisierung des durch φ und ψ in S definierten Schnittes gleichwertig ist. Man verändere folgendermaßen die Formeln φ und ψ:

(1) alle Parameter a bzw. Variablen z werden durch (a', a'') bzw. (z', z'') ersetzt,

(2) entsprechend werden Quantifikationen $\forall z\, \rho$ und $\exists z\, \rho$ durch $\forall z' z'' \big(S(z', z'') \Rightarrow \rho\big)$ bzw. $\exists z' z'' \big(S(z', z'') \wedge \rho\big)$ ersetzt,

(3) die Primformeln $B\big((u', u'')(v', v'')(w', w'')\big)$ werden ersetzt durch $\exists t\, \big(0 \leqslant t \leqslant 1 \wedge v = tu + (1-t)\,w\big)$ [2]),

---

[1]) D.h. als einziger Grundbegriff tritt die Zwischenbeziehung B auf und die Quantifikation läuft nur über Punkte.

[2]) Eine Gleichung $a = b$ meint natürlich die Konjunktion $a' = b' \wedge a'' = b''$.

(4) sind $\varphi^* (x', x'')$ bzw. $\psi^* (y', y'')$ die resultierenden Formeln, so setzen wir schließlich

$$\alpha(r) : \equiv \exists x' x'' (\varphi^* (x', x'') \wedge x = x_0 + r(y_0 - x_0))^{1)}$$
$$\beta(s) : \equiv \exists y' y'' (\psi^* (y', y'') \wedge y = x_0 + s(y_0 - x_0))^{1)}.$$

Die Umkehrung bereitet erheblich größere technische Schwierigkeiten. Sei dazu $S \subset R$ konvex und offen, R reell abgeschlossen und außerdem S ein Modell von GA_2. Es gilt jetzt die Richtigkeit von C^1 in S zu benützen, um zu zeigen, daß in R jeder S-definierbare Schnitt realisierbar ist. Wir haben also eine Übertragung eines Schnittes von R in das Modell S vorzunehmen und müssen dort die arithmetischen Operationen geometrisch beschreiben.

Es ist klar, daß durch Anwendung von affinen Transformationen im R^2 die folgende Situation keine Beschränkung der Allgemeinheit darstellt:

(i) die arithmetischen Formeln α und β definieren unter Benutzung eines 2-stelligen Prädikates S zwei nicht-leere Teilmengen von R im Intervall $[0, 1]$,

(ii) die konvexe offene Menge S enthält die Punkte $e_0 = (0, 0)$, $e_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $e_\infty = (1, 0)$, $e_\omega = (0, 1)$ und $e = (1, -1)$.

Wir denken uns jetzt die affine Ebene R^2 in die projektive Ebene $\mathbf{P}_R^2$ eingebettet und bilden mit einer projektiven Transformation f die uneigentliche Gerade des R^2 im $\mathbf{P}_R^2$ auf die Gerade durch e_ω und e_∞ ab, wobei e_0 in sich überführt werden soll. Diese Abbildung kann für $(x', x'') \in R^2$ etwa durch

$$f(x', x'') = \left(\frac{x'}{1 + x' + x''}, \frac{x''}{1 + x' + x''}\right)$$

beschrieben werden. Die Abbildung f bildet also den Quadranten $0 \leqslant x', x''$ auf das Dreieck e_0, e_∞, e_ω ab, das im Innern von S liegt. Insbesondere bildet f das Intervall $[0, 1]$ von R auf die Strecke $[e_0, e_1]$ in S ab [2]). Damit liegen die f-Bilder des durch α und β definierten Schnittes in S. Es bleibt also noch die Übersetzung der arithmetischen Operationen in die geometrische Sprache von S.

---

[1]) Eine Gleichung $a = b$ meint natürlich die Konjunktion $a' = b' \wedge a'' = b''$.
[2]) Dabei wird wie üblich R durch $r \mapsto (r, 0)$ in R^2 eingebettet.

Da wir nur für nicht-negative $r \in R$ garantieren können, daß ihre f-Bilder in S liegen, ersetzen wir die Formeln α und β durch gleichwertige Formeln (die wir wieder mit α und β bezeichnen wollen), in denen jedoch nur über die Elemente aus $P = \{r \in R \mid r \geqslant 0\}$ quantifiziert wird. Es ist klar, wie dies zu geschehen hat: statt von einem Körperelement r sprechen wir von einer Äquivalenzklasse $\langle r_1, r_2 \rangle / \sim$, wobei für $r_1, r_2, s_1, s_2 \in P$ definiert wird

$$\langle r_1, r_2 \rangle \sim \langle s_1, s_2 \rangle :\Leftrightarrow r_1 + s_2 = s_1 + r_2$$

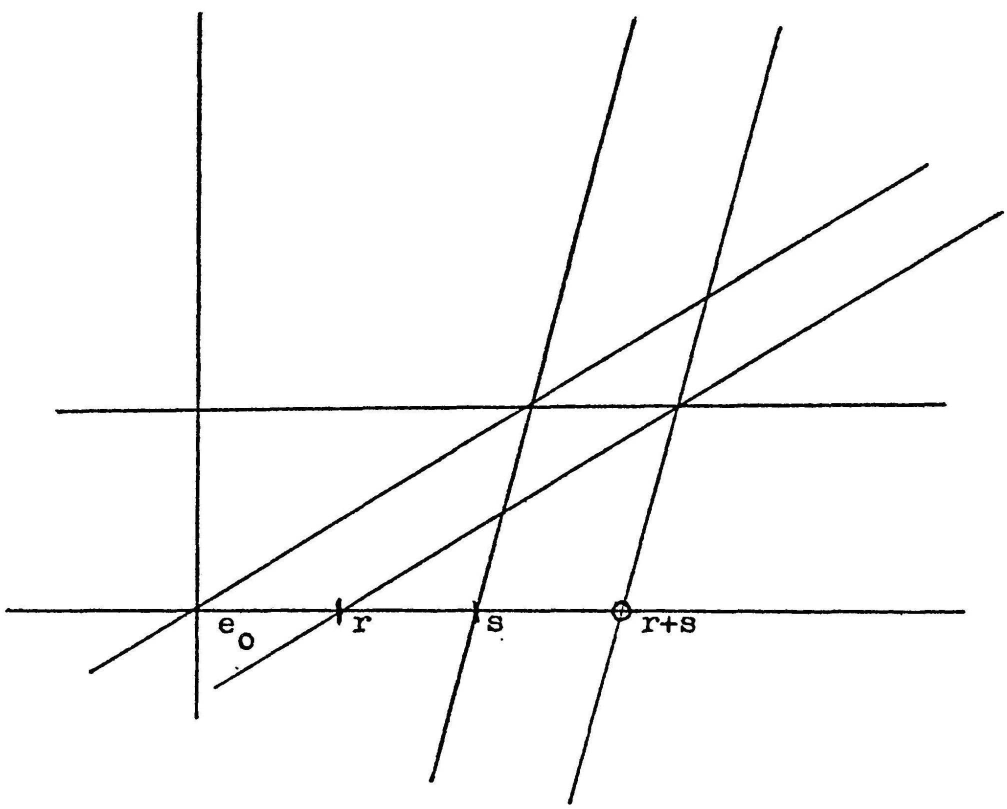
In den Formeln α und β taucht jetzt natürlich das ursprünglich 2-stellige Prädikat S als vierstelliges auf:

$$S(\langle r_1, r_2 \rangle, \langle s_1, s_2 \rangle)$$

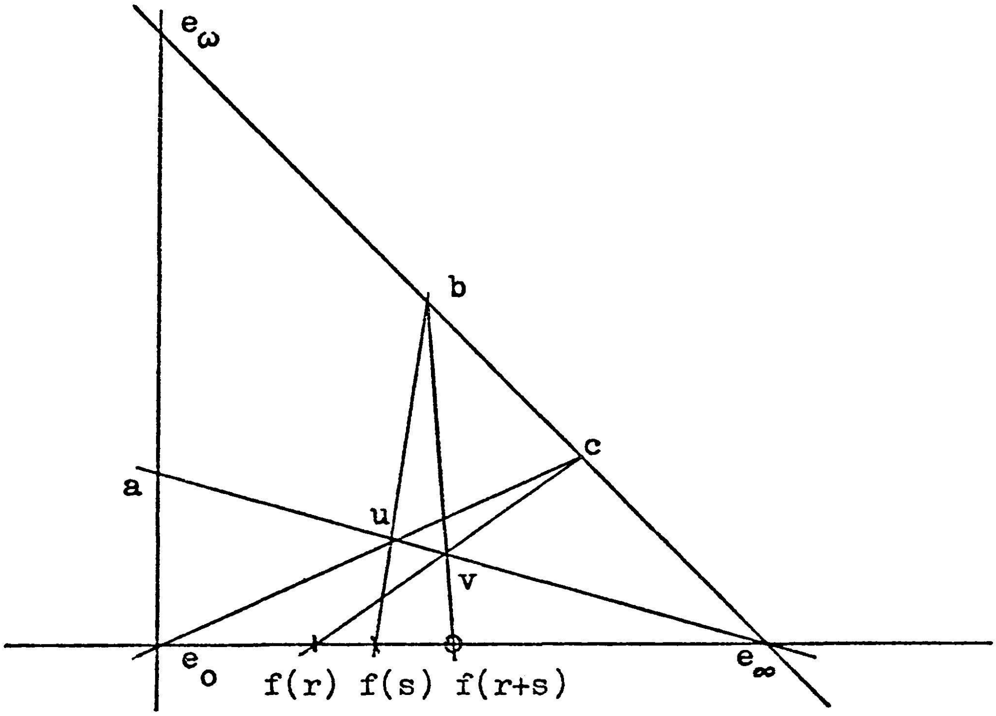
Wir haben also statt (i) jetzt:

(i′) die Formeln α und β enthalten nur Quantifikationen über Elemente aus P, Parameter aus P, das vierstellige Prädikat $S(\langle r_1, r_2 \rangle, \langle s_1, s_2 \rangle)$ und definieren nicht-leere Mengen im Intervall [0, 1].

Sind nun $r, s, t \in P$ gegeben, so läßt sich die Beziehung $r + s = t$ im Quadranten $0 \leqslant x', x''$ bekanntlich rein affin beschreiben:



Wenden wir die projektive Abbildung f an, so wird daraus:



Bezeichnet dann $x \oplus y = z$ die folgende geometrische Formel:

$$\exists\, abcuv \,[B(e_0 a e_\omega) \wedge e_0 \neq a \neq e_\omega \wedge B(e_\omega b e_\infty) \wedge b \neq e_\infty \wedge B(yub) \wedge \wedge B(aue_\infty) \wedge B(e_0 uc) \wedge B(ave_\infty) \wedge B(xvc) \wedge B(e_\omega c e_\infty) \wedge \wedge B(zvb)]\,,$$

so ist klar, daß gilt:

$$f(r) \oplus f(s) = f(r+s)$$

Analog läßt sich die Multiplikation $\odot$ von Elementen aus $[e_0, e_\infty\rangle$ rein geometrisch in S definieren. Es gilt dann

$$f(r) \odot f(s) = f(r \cdot s)$$

Es fehlt jetzt noch die Übersetzung von

$$S(\langle r_1, r_2\rangle, \langle s_1, s_2\rangle)$$

Wir suchen eine geometrische Formel $\sigma(x_1, x_2; y_1, y_2)$ mit der Eigenschaft:

$$\left.\begin{array}{c}\sigma(f(r_1), f(r_2); f(s_1), f(s_2))\\ \text{gilt in } S\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}S(\langle r_1, r_2\rangle, \langle s_1, s_2\rangle)\\ \text{gilt in } (R, S)\end{array}\right.$$

Die Formel σ muß also in S ausdrücken, daß $\langle x_1, x_2\rangle$ und $\langle y_1, y_2\rangle$ die f-Bilder der affinen Koordinaten $\langle r_1, r_2\rangle$ und $\langle s_1, s_2\rangle$ eines Punktes aus S sind. Dabei genügt es natürlich, wenn

$$\langle x_1, x_2 \rangle \approx \langle f(r_1), f(r_2) \rangle \text{ und } \langle y_1, y_2 \rangle \approx \langle f(s_1), f(s_2) \rangle$$

gilt, wobei $\approx$ die analog zu $\sim$ mit $\oplus$ in $[e_0, e_\infty\rangle$ gebildete Äquivalenzrelation ist. Nach Szczerba-Tarski [S-T$_2$], §5 läßt sich eine Formel $K_5(z; x_1, x_2; y_1, y_2)$ angeben, die für $z, x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ gerade besagt, daß

$$(f(z'), f(z'')) = (\langle x_1, x_2 \rangle/\approx, \langle y_1, y_2 \rangle/\approx)$$

ist. Wir können also

$$\sigma(x_1, x_2; y_1, y_2) :\equiv \exists\, z\, K_5(z; x_1, x_2; y_1, y_2)$$

setzen.

Nach diesen Ausführungen dürfte klar sein, daß die folgende Übersetzungsvorschrift für die Formeln α und β einen geometrisch definierten Schnitt auf $[e_0, e_1]$ liefert, dessen Realisierung in S eine Realisierung des ursprünglichen Schnittes auf $[0, 1]$ nach sich zieht:

(1) ersetze in α und β Quantifikationen $\forall\, x\, \rho$ bzw. $\exists\, x\, \rho$ durch $\forall\, x\,(B(e_0 x e_\infty) \wedge x \neq e_\infty \Rightarrow \rho)$ bzw. $\exists\, x\,(B(e_0 x e_\infty) \wedge x \neq e_\infty \wedge \rho)$,

(2) ersetze die Teilformeln $u + v = w$ und $u \cdot v = w$ durch $u \oplus v = w$ bzw. $u \odot v = w$,

(3) ersetze die Teilformeln $S(\langle u_1, u_2\rangle, \langle v_1, v_2\rangle)$ durch $\sigma(u_1, u_2; v_1, v_2)$,

(4) ersetze Parameter r durch $f(r)$.

3. Die Nicht-Charakterisierbarkeit

Wir wollen nun den im 1. Abschnitt formulierten Nicht-Charakterisierbarkeitssatz beweisen, indem wir ihn auf ein Resultat von R. Montague in [M] zurückführen.

Dazu betrachten wir zuerst einen reell abgeschlossenen Körper R mit einer Teilmenge N, die die folgenden Bedingungen erfüllen soll:

(a) $O \in N$ und $r \in N \Rightarrow r + 1 \in N$

(b) $r, s \in N, r < s \quad \Rightarrow r + 1 \leqslant s$

(c) $(\forall r \in R, r \geqslant O)(\exists t \in N)\, t \leqslant r < t + 1$