

# 1. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR CERTAINES GÉNÉRALISATIONS DE L'ÉQUATION DE THUE-MAHLER

par K. GYÖRY

*Dédié à Monsieur le Professeur Kurt Mahler*

## 1. INTRODUCTION

Soient  $L$  un corps de nombres algébriques de degré  $l \geq 1$ ,  $\mathbf{Z}_L$  son anneau des entiers, et  $K$  une extension de degré  $n \geq 3$  de  $L$ . Soient  $\beta, \pi_1, \dots, \pi_s$  ( $s \geq 0$ ) des entiers algébriques non nuls dans  $L$  et  $d \geq 1$ . Supposons  $(\pi_i) = \mathfrak{p}_i^{h_L}$ , où  $h_L$  désigne le nombre de classes de  $L$ ,  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$  sont des idéaux premiers distincts avec normes  $N(\mathfrak{p}_i) = p_i^{f_i}$  et  $p_1, \dots, p_s$  sont des nombres premiers  $\leq P$ . Pour chaque  $\alpha \in K$ , notons  $\alpha = \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}$  les conjugués de  $\alpha$  sur  $L$ . Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$   $m \geq 2$  entiers algébriques non nuls dans  $K$ . Comme il est connu (voir par ex. [1]),

$$F(x_1, \dots, x_m) = N_{K/L}(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m) = \prod_{i=1}^n (\alpha_1^{(i)} x_1 + \dots + \alpha_m^{(i)} x_m)$$

est une forme de degré  $n$  à coefficients dans  $\mathbf{Z}_L$ . Supposons  $F$  irréductible sur  $L$ . De nombreux problèmes de théorie des nombres conduisent à la recherche des solutions  $x_1, \dots, x_m \in \mathbf{Z}_L, z_1, \dots, z_s \in \mathbf{Z}$  de l'équation

$$(1) \quad N_{K/L}(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m) = \beta \pi_1^{z_1} \dots \pi_s^{z_s}, \quad N((x_1, \dots, x_m)) \leq d.$$

Quand  $m = 2$  et  $L = \mathbf{Q}$ , (1) est justement l'équation de Thue-Mahler et, d'après un célèbre théorème de Mahler [12], [13], (1) n'admet qu'un nombre fini de solutions. Pour certaines généralisations voir Parry [14] et Schlickewei [15]. Ces théorèmes de Mahler, Parry et Schlickewei ne sont pas effectifs, i.e. leurs démonstrations ne fournissent aucun algorithme pour déterminer les solutions. En utilisant la méthode de Baker, A. Vinogradov et Sprindžuk [20], Coates [2], [3], Sprindžuk [17], [18], [19], Kotov [10], Kotov et Sprindžuk [11] et Györy [4], [6] ont obtenu des bornes effectives pour les solutions de l'équation de Thue-Mahler. Les résultats de [10], [11], [4] et

[6] sont valables sur des corps de nombres algébriques  $L$  quelconques. Pour  $m \geq 2$ , [4] et [6] contiennent, sous certaines hypothèses faites sur  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , des majorations effectives pour les solutions de (1). Dans cet article nous donnons des généralisations communes des résultats effectifs mentionnés ci-dessus et de certains théorèmes effectifs [8], [9] obtenus dans le cas  $s = 0$ . Notre principal résultat a plusieurs applications. Certaines d'entre elles seront publiées dans [7].

## 2. ENONCÉS DES RÉSULTATS

Soient  $L, K, \beta$  et  $\pi_1, \dots, \pi_s$  comme plus haut. Supposons  $|\beta| \leq b$  et  $\max_{1 \leq i \leq s} |\pi_i| \leq \mathcal{P}$  ( $\geq 2$ ) ( $|\alpha|$  désigne la maison d'un nombre algébrique  $\alpha$ , i.e. le maximum des valeurs absolues des racines du polynôme minimal de  $\alpha$  sur  $\mathbf{Z}$ ). Pour  $s = 0$  soit  $P = \mathcal{P} = 2$ . Soient  $D_K$  le discriminant de  $K$ , et  $G$  une extension galoisienne de  $L$  contenant  $K$ . Désignons par  $h_G$  et  $R_G$  (resp.  $h_L$  et  $R_L$ ) le nombre de classes et le régulateur de  $G$  (resp. de  $L$ ). Posons  $[G : \mathbf{Q}] = g$ ,  $[G : L] = f$  et soit  $r$  le nombre des unités fondamentales de  $G$ .

Nous disons que les nombres  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$  ( $m \geq 2$ ) sont *connexes* par rapport à  $K/L$  si le système  $\mathcal{L}$  des formes linéaires  $l^{(i)}(x) = \alpha_1^{(i)} x_1 + \dots + \alpha_m^{(i)} x_m$ ,  $i = 1, \dots, n$ , est connexe; i.e. si pour tout  $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , il existe une suite  $l^{(i)} = l^{(i_1)}, \dots, l^{(i_v)} = l^{(j)}$  dans  $\mathcal{L}$  telle que  $\lambda'_{i_\mu} l^{(i_\mu)} + \lambda''_{i_\mu+1} l^{(i_\mu+1)} \in \mathcal{L}$  avec  $\lambda'_{i_\mu}, \lambda''_{i_\mu+1} \in \overline{\mathbf{Q}} \setminus \{0\}$ ,  $\mu = 1, \dots, v-1$  (cf. [8], [4] ou [6]).

EXEMPLE 1. Il est évident que si  $m = 2$ ,  $0 \neq \alpha_1 \in L$  et  $K = L(\alpha_2)$ , alors  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont connexes par rapport à  $K/L$ .

EXEMPLE 2. Si  $K = L(\alpha_2, \dots, \alpha_m)$  avec  $[L(\alpha_i) : L] = n_i \geq 3$ ,  $i = 2, \dots, m$ , et  $n_2 \dots n_m = n$ , alors, d'après le Lemme 4 de [8], les nombres  $1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  sont connexes par rapport à  $K/L$ .

Soit

$$C = (25(r + sf + 3)g)^{k(24(r+2) + sf(2r+13))} R_L^* (h_L \log \mathcal{P})^{3k-2} \cdot (|D_K|^{1/2} (\log |D_K|)^{ln})^{k-1} (P^g (\log P)^7 R_G \log^3 (R_G^* h_G))^k \cdot (R_G + h_G \log P)^{k(sf+2)},$$