

4. Le résultat abélien

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Dans le cas particulier où \mathcal{A} est la suite de tous les entiers on a d'une part $B(x) = [x]$ et d'autre part, compte tenu de (4),

$$\begin{aligned} \sum_{|m-y| \leq y^\xi} N(m, x) &= x \left(1 + O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right) \right) \sum_{|m-y| \leq y^\xi} \varphi(y, m) \\ &= x \left(1 + O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right) \right) \left(\int_{|t-y| \leq y^\xi} \varphi(y, t) dt + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) \right) \\ &= x \left(1 + O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right) \right), \end{aligned}$$

en vertu des assertions (iv) et (v) du lemme 1. Cela montre que pour toute suite \mathcal{A} le terme reste de (5) est majoré par

$$[x] - x \left(1 + O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right) \right) = o(x).$$

En reportant dans (5) et en utilisant (4) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{B(x)}{x} &= \left(1 + O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right) \right) \sum_{\substack{m \in \mathcal{A} \\ |m-y| \leq y^\xi}} \varphi(y, m) + o(1) \\ &= (1 + o(1)) \left(\int_0^\infty \varphi(y, t) dA(t) + o(1) \right) + o(1) \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

4. LE RÉSULTAT ABÉLIEN

Le lemme suivant, dont la démonstration nous a été suggérée par H. Delange, nous sera utile.

LEMME 2. Soit A une fonction mesurable complexe vérifiant (1). Alors la relation (1) a lieu uniformément en c sur tout compact.

Démonstration. On peut supposer sans restreindre la généralité que l'on a $\alpha = 0$ dans (1).

Il suffit de montrer que, pour tout réel positif h , il y a convergence uniforme de $\frac{A(x+c\sqrt{x}) - A(x)}{\sqrt{x}}$ vers 0 pour $0 \leq c \leq h$. En effet, la convergence uniforme pour $0 \leq c \leq h$ implique la convergence uniforme pour $-h' \leq c \leq 0$ quel que soit $h' \in]0, h[$ du fait que, pour x assez grand on a

$$\begin{aligned} \forall c (-h' \leq c \leq 0) \quad x + c\sqrt{x} &\leq x \leq x + c\sqrt{x} + h\sqrt{x} + c\sqrt{x} \\ &= x + (h+c)\sqrt{x} + O(1). \end{aligned}$$

Fixons donc deux réels positifs h et ε .

Pour tout $x > 0$ on désigne par I_x l'intervalle $[x, x + 2h\sqrt{x}]$ et par E_x l'ensemble des t de I_x satisfaisant à

$$|A(t) - A(x)| > \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{2}} \sqrt{x}.$$

On note E_x^* l'ensemble des réels c de $[0, 2h]$ satisfaisant à

$$|A(x + c\sqrt{x}) - A(x)| > \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{2}} \sqrt{x}.$$

Il est clair que E_x et E_x^* sont mesurables et que l'on a, en notant μ la mesure de Lebesgue,

$$\mu(E_x) = \sqrt{x} \mu(E_x^*).$$

Maintenant le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée appliqué à la fonction caractéristique de E_x^* montre que $\mu(E_x^*) = o(1)$. Il existe donc un réel x_0 , que l'on peut supposer $\geq h^2$, tel que

$$\forall x (x \geq x_0) \quad \mu(E_x) \leq \frac{h}{3} \sqrt{x}.$$

On voit alors que pour $x \geq x_0$ on a:

$$\forall c (0 \leq c \leq h) \quad \left| \frac{A(x + c\sqrt{x}) - A(x)}{\sqrt{x}} \right| \leq \varepsilon.$$

En effet, des inégalités

$$\mu(I_x \cap I_{x+c\sqrt{x}}) \geq (2h-c)\sqrt{x} \geq h\sqrt{x}$$

et

$$\begin{aligned} \mu(E_x \cup E_{x+c\sqrt{x}}) &\leq \frac{h}{3}\sqrt{x} + \frac{h}{3}\sqrt{x+h\sqrt{x}} = \frac{h}{3}\sqrt{x} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{h}{\sqrt{x}}}\right) \\ &\leq \frac{h}{3}(1 + \sqrt{2})\sqrt{x} < h\sqrt{x} \end{aligned}$$

on déduit l'existence d'au moins un t appartenant à $I_x \cap I_{x+c\sqrt{x}}$ et n'appartenant pas à $E_x \cup E_{x+c\sqrt{x}}$. D'après la définition de E_x on obtient

$$|A(t) - A(x)| \leq \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{2}} \sqrt{x}$$

et

$$|A(t) - A(x+c\sqrt{x})| \leq \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{2}} \sqrt{x + h\sqrt{x}}$$

d'où

$$|A(x) - A(x+c\sqrt{x})| \leq \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{2}} (\sqrt{x} + \sqrt{x+h\sqrt{x}}) \leq \varepsilon\sqrt{x}.$$

Remarque. La démonstration précédente est une variante de celle qui a été utilisée par Delange ¹⁾ pour établir le fait suivant, déjà signalé par Karamata ²⁾:

Si A est une fonction à croissance lente, c'est-à-dire satisfaisant à

$$(\forall a \geq 1) \quad \frac{A(ax)}{A(x)} = 1 + o(1),$$

alors cette dernière relation a lieu uniformément en a sur tout compact de $[1, +\infty[$.

Nous pouvons maintenant établir le théorème 3.

Soit, donc, A une fonction de \mathcal{V} satisfaisant à la relation (1). L'assertion (v) du lemme 1 montre que l'on peut, sans restreindre la généralité, supposer $\alpha = 0$, soit

$$(\forall c > 0) \quad A(x+c\sqrt{x}) - A(x) = o(\sqrt{x}).$$

¹⁾ H. Delange, « Sur un théorème de Karamata », *Bull. Sc. Math.* (2) 79 (1955), 1-4.

²⁾ J. Karamata, « Sur un mode de croissance régulière des fonctions », *Mathematica* 4 (1930), 38-53.

Comme cette relation, d'après le lemme 2, est uniforme en c sur tout compact, nous l'écrivons sous la forme:

$$(6) \quad A(x + O(\sqrt{x})) - A(x) = o(\sqrt{x}).$$

En particulier, on a:

$$A(x) = \sum_{k \leq \sqrt{x}} A(k^2 + k) - A(k^2 - k) + o(\sqrt{x}) = \sum_{k \leq \sqrt{x}} o(k) + o(\sqrt{x})$$

d'où:

$$(7) \quad A(x) = o(x).$$

Maintenant, décomposons l'intégrale du premier membre de (3) en une somme, soit:

$$\int_0^{\infty} \varphi(x, t) dA(t) = I_1 + I_2 + I_3$$

où I_1, I_2, I_3 correspondent respectivement aux domaines d'intégration $[0, x - \sqrt{x}[$, $[x - \sqrt{x}, x + \sqrt{x}[$ et $[x + \sqrt{x}, +\infty[$.

Une intégration par parties suffit pour majorer $|I_2|$:

$$\begin{aligned} I_2 &= [A(t) \varphi(x, t)]_{x - \sqrt{x}}^{x + \sqrt{x}} - \int_{x - \sqrt{x}}^{x + \sqrt{x}} A(t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dt \\ &= [(A(t) - A(x)) \varphi(x, t)]_{x - \sqrt{x}}^{x + \sqrt{x}} + \int_{x - \sqrt{x}}^{x + \sqrt{x}} (A(x) - A(t)) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dt; \end{aligned}$$

la conclusion $I_2 = o(1)$ découle alors de (6) et de la majoration

$$\sup_{|t-x| \leq \sqrt{x}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) \right| = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

qui est une conséquence des assertions (i) et (ii) du lemme 1.

Pour majorer $|I_1 + I_3|$, définissons une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de nombres réels par les formules:

$$\begin{aligned} x_0 &= x \\ x_k &= x_{k-1} + \sqrt{x_{k-1}} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

on vérifie facilement l'inégalité

$$x + k\sqrt{x} \leq x_k \leq x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Un réel ξ étant donné dans l'intervalle $\left] \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right[$, on pose

$$m = [x^{\xi - \frac{1}{2}}]$$

de sorte que l'on a pour x assez grand

$$x_{\pm m} = x \pm x^\xi + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

On décompose alors $I_1 + I_3$ en une somme:

$$(8) \quad I_1 + I_3 = \left\{ \int_0^{x_{-m}} + \int_{x_m}^{\infty} \right\} \{ \varphi(x, t) dA(t) \} \\ + \sum_{\substack{-m \leq k \leq m-1 \\ k \neq -1, 0}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x, t) dA(t).$$

D'une part on a, quitte à supposer $A(0) = 0$,

$$\left\{ \int_0^{x_{-m}} + \int_{x_m}^{\infty} \right\} \{ \varphi(x, t) dA(t) \} = [\varphi(x, t) A(t)]_{x_{-m}}^{x_m} \\ - \left\{ \int_0^{x_{-m}} + \int_{x_m}^{+\infty} \right\} \left\{ A(t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dt \right\};$$

d'après l'assertion (i) du lemme 1 et la relation (7) il vient:

$$\varphi(x, x_{\pm m}) A(x_{\pm m}) = o(1)$$

et d'après l'assertion (iii) du lemme 1 et la relation (7) on a:

$$(9) \quad \left\{ \left| \left\{ \int_0^{x_{-m}} + \int_{x_m}^{+\infty} \right\} \left\{ A(t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) \right\} dt \right| \leq o(x_{-m}) [\varphi(x, t)]_0^{x_{-m}} \right. \\ \left. + o \left(\int_{x_m}^{\infty} t \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dt \right) \right. \\ \left. = o(x_{-m}) \{ \varphi(x, x_{-m}) - e^{-x} \} + o(x_m \varphi(x, x_m) + \int_{x_m}^{\infty} \varphi(x, t) dt) \right. \\ \left. = o(1) \right\}$$

D'autre part, puisqu'aucun des x_k ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) n'appartient à l'intervalle $[x - 1, x]$ la formule de la moyenne implique

$$\begin{aligned} \forall k (-m \leq k \leq m-1, k \neq -1, 0) \quad & \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x, t) dA(t) \right| \\ & \leq \varphi(x, x_{k+i}) \sup_{x_k \leq t \leq x_{k+1}} |A(t) - A(x_{k+i})| \end{aligned}$$

avec $i = 1$ si $k \geq 1$ et $i = 0$ si $k \leq -2$.

D'après (6) on a donc:

$$\begin{aligned} \forall k (-m \leq k \leq m-1, k \neq -1, 0) \quad & \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x, t) dA(t) \right| \\ & = o(\sqrt{x} \varphi(x, x_{k+i})) \end{aligned}$$

d'où, en utilisant l'assertion (i) du lemme 1,

$$\begin{aligned} (10) \quad & \sum_{\substack{-m \leq k \leq m-1 \\ k \neq -1, 0}} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x, t) dA(t) \right| \\ & = o \left(\sum_{\substack{-m \leq k \leq m-1 \\ k \neq -1, 0}} \exp \left\{ -\frac{k^2}{2} (1 + o(1)) \right\} \right) \\ & = o(1). \end{aligned}$$

En reportant (10) et (9) dans (8), on obtient $I_1 + I_3 = o(1)$, ce qui achève la démonstration.

5. LE RÉSULTAT TAUBÉRIEN

Dans cette section, nous nous proposons d'établir le théorème 4. Nous supposons, dans toute la démonstration, A réelle et croissante; grâce au théorème 3, le cas général se déduit aisément de ce cas particulier.

Nous noterons \mathcal{V}_+ l'ensemble des fonctions réelles croissantes, définies sur l'ensemble des réels positifs ou nuls et prolongées par 0 sur l'ensemble des réels négatifs.

Les méthodes de démonstration que nous utiliserons sont fondées sur des idées de Hardy et Littlewood ([6], [7]) dont on trouvera un exposé dans le chapitre 9 de [5]. En particulier, le point crucial consiste à appliquer au bon moment le théorème de Vitali, que nous énonçons pour mémoire: