2. Un lemme utile

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Le théorème suivant montre que la restriction $a_n \geqslant -\lambda$ à laquelle est assujettie l'implication (B) $\Rightarrow$ (C) est optimale.

THÉORÈME 5. *Pour toute fonction réelle* $t \mapsto \psi(t)$ *tendant vers l'infini il existe une suite réelle* (a_n) *satisfaisant aux trois propriétés suivantes :*

(a) $(\forall n \in \mathbf{N})\ |a_n| \leqslant \psi(n)$

(b) (a_n) *tend vers* 0 *au sens de Borel*

(c) *Pour toute constante positive* c *l'expression* $\frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{x \leqq n < x + c\sqrt{x}} a_n$ *ne tend pas vers* 0 *lorsque* x *tend vers l'infini.*

2. Un lemme utile

Pour tout couple (x, t) de réels positifs, nous posons:

$$\varphi(x, t) = e^{-x} \frac{x^t}{\Gamma(t+1)}.$$

L'énoncé ci-dessous rassemble les principales propriétés de la fonction $\varphi(x, t)$. La démonstration, utilisant la formule de Stirling et d'autres résultats classiques concernant la fonction Γ, est laissée au lecteur.

LEMME 1.

(i) *pour* $x > 0$ *et* $|t - x| \leqslant x^{2/3}$, *on a :*

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left\{-\frac{(t-x)^2}{2x}\right\} \left(1 + O\left(\frac{1+|t-x|}{x}\right) + O\left(\frac{|t-x|^3}{x^2}\right)\right)$$

(ii) *pour* $x > 0$ *et* $|t - x| \leqslant \frac{x}{2}$ *on a*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = O\left(\frac{1+|t-x|}{x} \cdot \varphi(x, t)\right)$$

(iii) *pour tout réel positif* x, *la fonction partielle* $t \mapsto \varphi(x, t)$ *est positive et atteint son maximum absolu en un point* $t(x)$ *de l'intervalle* $[x - 1, x]$;

elle est croissante sur l'intervalle $[0, t(x)[$ *et décroissante sur l'intervalle* $]t(x), +\infty[$.

(iv) *pour tout réel* ξ *satisfaisant à l'inégalité* $\frac{1}{2} < \xi < \frac{2}{3}$ *et tout réel positif* ε, *on a :*

$$\int_{|t-x|>x^\xi} \varphi(x,t)\,dt = O(\exp\{-x^{2\xi-1-\varepsilon}\})$$

(v) *on a pour* x *infini*

$$\int_0^\infty \varphi(x,t)\,dt = 1 + O(e^{-x}).$$

3. Démonstration du théorème 2

E et g gardant la même signification que dans l'énoncé du théorème 1, posons pour x réel positif et m entier

$$y = y(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in E}} \frac{1}{p}$$

et

$$N(m,x) = \operatorname{card}\{n \leqslant x : g(n) = m\}.$$

Halàsz a démontré dans [4] que l'on a, sous la seule hypothèse $y(x) \to +\infty$, pour tout réel δ satisfaisant à $0 < \delta \leqslant 1$,

$$(4) \qquad N(m,x) = x\,\varphi(y,m)\left\{1 + O\left(\frac{|m-y|}{y}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right\},$$

uniformément pour $\delta \leqslant \frac{m}{y} \leqslant 2 - \delta$ et $y \geqslant 2$.

Notant $\mathscr{B} = g^{-1}(\mathscr{A})$, on a pour tout x positif

$$B(x) := \operatorname{card}\{n \leqslant x : n \in \mathscr{B}\} = \sum_{m \in \mathscr{A}} N(m,x).$$

Fixons alors un nombre réel ξ dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$, on a:

$$(5) \qquad B(x) = \sum_{\substack{m \in \mathscr{A} \\ |m-y| \leq y^\xi}} N(m,x) + O\Big(\sum_{|m-y|>y^\xi} N(m,x)\Big).$$