

## 2. Un lemme utile

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Le théorème suivant montre que la restriction  $a_n \geq -\lambda$  à laquelle est assujettie l'implication (B)  $\Rightarrow$  (C) est optimale.

THÉORÈME 5. Pour toute fonction réelle  $t \mapsto \psi(t)$  tendant vers l'infini il existe une suite réelle  $(a_n)$  satisfaisant aux trois propriétés suivantes :

(a)  $(\forall n \in \mathbf{N}) |a_n| \leq \psi(n)$

(b)  $(a_n)$  tend vers 0 au sens de Borel

(c) Pour toute constante positive  $c$  l'expression  $\frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{x \leq n < x + c\sqrt{x}} a_n$  ne tend pas vers 0 lorsque  $x$  tend vers l'infini.

## 2. UN LEMME UTILE

Pour tout couple  $(x, t)$  de réels positifs, nous posons :

$$\varphi(x, t) = e^{-x} \frac{x^t}{\Gamma(t+1)}.$$

L'énoncé ci-dessous rassemble les principales propriétés de la fonction  $\varphi(x, t)$ . La démonstration, utilisant la formule de Stirling et d'autres résultats classiques concernant la fonction  $\Gamma$ , est laissée au lecteur.

LEMME 1.

(i) pour  $x > 0$  et  $|t - x| \leq x^{2/3}$ , on a :

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp \left\{ -\frac{(t-x)^2}{2x} \right\} \left( 1 + O\left(\frac{1+|t-x|}{x}\right) + O\left(\frac{|t-x|^3}{x^2}\right) \right)$$

(ii) pour  $x > 0$  et  $|t - x| \leq \frac{x}{2}$  on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = O\left(\frac{1+|t-x|}{x} \cdot \varphi(x, t)\right)$$

(iii) pour tout réel positif  $x$ , la fonction partielle  $t \mapsto \varphi(x, t)$  est positive et atteint son maximum absolu en un point  $t(x)$  de l'intervalle  $[x - 1, x]$ ;

elle est croissante sur l'intervalle  $[0, t(x)[$  et décroissante sur l'intervalle  $]t(x), +\infty[$ .

(iv) pour tout réel  $\xi$  satisfaisant à l'inégalité  $\frac{1}{2} < \xi < \frac{2}{3}$  et tout réel positif

$\varepsilon$ , on a :

$$\int_{|t-x| > x^\xi} \varphi(x, t) dt = O(\exp \{-x^{2\xi-1-\varepsilon}\})$$

(v) on a pour  $x$  infini

$$\int_0^\infty \varphi(x, t) dt = 1 + O(e^{-x}).$$

### 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

$E$  et  $g$  gardant la même signification que dans l'énoncé du théorème 1, posons pour  $x$  réel positif et  $m$  entier

$$y = y(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in E}} \frac{1}{p}$$

et

$$N(m, x) = \text{card} \{ n \leq x : g(n) = m \}.$$

Halász a démontré dans [4] que l'on a, sous la seule hypothèse  $y(x) \rightarrow +\infty$ , pour tout réel  $\delta$  satisfaisant à  $0 < \delta \leq 1$ ,

$$(4) \quad N(m, x) = x \varphi(y, m) \left\{ 1 + O\left(\frac{|m-y|}{y}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) \right\},$$

uniformément pour  $\delta \leq \frac{m}{y} \leq 2 - \delta$  et  $y \geq 2$ .

Notant  $\mathcal{B} = g^{-1}(\mathcal{A})$ , on a pour tout  $x$  positif

$$B(x) := \text{card} \{ n \leq x : n \in \mathcal{B} \} = \sum_{m \in \mathcal{A}} N(m, x).$$

Fixons alors un nombre réel  $\xi$  dans l'intervalle  $\left] \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right[$ , on a :

$$(5) \quad B(x) = \sum_{\substack{m \in \mathcal{A} \\ |m-y| \leq y^\xi}} N(m, x) + O\left( \sum_{|m-y| > y^\xi} N(m, x) \right).$$