

1. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LE PROCÉDÉ DE SOMMATION DE BOREL ET LA RÉPARTITION DU NOMBRE DES FACTEURS PREMIERS DES ENTIERS

par Gérald TENENBAUM

1. INTRODUCTION

Soit E un ensemble non vide de nombres premiers. Pour tout entier naturel positif n , désignons par $\Omega_E(n)$ et par $\omega_E(n)$ le nombre des facteurs premiers de n qui appartiennent à E , comptés respectivement avec et sans leur ordre de multiplicité. Dans le cas où E est l'ensemble de tous les nombres premiers nous écrivons $\Omega_E(n) = \Omega(n)$ et $\omega_E(n) = \omega(n)$.

Pour toute suite d'entiers \mathcal{A} , nous notons A la fonction sommatoire définie par

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \text{card } \{n \leq x : n \in \mathcal{A}\} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Enfin, étant données une suite d'entiers \mathcal{A} et une fonction arithmétique à valeurs entières g , nous notons

$$g^{-1}(\mathcal{A}) = \{n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} : g(n) \in \mathcal{A}\}$$

la suite croissante des entiers positifs n tels que $g(n)$ appartienne à \mathcal{A} .

Hubert Delange a montré dans [1] que, si \mathcal{A} est une progression arithmétique et si $g = \Omega$ ou ω , alors $g^{-1}(\mathcal{A})$ possède une densité naturelle qui est celle de \mathcal{A} ¹⁾. Jean-Marc Deshouillers [3] a généralisé ce résultat au cas où la suite \mathcal{A} vérifie

$$A(x) = \alpha x + o(\sqrt{x})$$

¹⁾ Dans le cas de la fonction Ω , ce résultat avait déjà été établi par S. S. Pillai « Generalization of a theorem of Mangoldt » *Proc. Indian Acad. Sc. Sect. A*, 11 (1940), 13-20.

pour un certain α de l'intervalle $[0, 1]$. Il a également montré, dans le cas où \mathcal{A} est de densité inférieure nulle, que $\Omega^{-1}(\mathcal{A})$ ou $\omega^{-1}(\mathcal{A})$ possède une densité (nécessairement nulle) si et seulement si l'on a

$$(\forall c > 0) \quad A(x + c\sqrt{x}) = A(x) + o(\sqrt{x}).$$

Nous nous proposons d'étendre ces résultats de la manière suivante:

THÉORÈME 1. *Soit E un ensemble de nombres premiers tel que*

$$\sum_{p \in E} \frac{1}{p} = +\infty.$$

On pose $g = \Omega_E$ ou $g = \omega_E$.

Alors, une condition nécessaire et suffisante sur la suite \mathcal{A} pour que $g^{-1}(\mathcal{A})$ possède une densité naturelle est l'existence d'un réel α de $[0, 1]$ tel que

$$(1) \quad (\forall c > 0) \quad A(x + c\sqrt{x}) - A(x) = c\alpha\sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

De plus, dans ce cas, les suites \mathcal{A} et $g^{-1}(\mathcal{A})$ ont pour densité α .

Rappelons qu'une suite complexe $(a_n)_{n \geq 0}$ converge vers un nombre complexe α au sens de Borel si l'on a pour x infini

$$(2) \quad e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \alpha + o(1).$$

En posant, pour $x \geq 0$,

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n,$$

on voit que la relation (2) équivaut à la relation

$$(3) \quad e^{-x} \int_0^{\infty} \frac{x^t}{\Gamma(t+1)} dA(t) = \alpha + o(1)$$

où Γ désigne la fonction eulérienne.

Moins par souci de généralité que de commodité et clarté d'exposition, nous avons préféré le cadre de l'intégrale de Stieltjes à celui des séries. Ainsi, l'espace des suites complexes disparaîtra-t-il au profit de celui des

fonctions à valeurs complexes et à variation bornée sur tout intervalle borné (nous noterons \mathcal{V} cet espace fonctionnel) et la notion de convergence au sens de Borel sera-t-elle utilisée sous la forme (3).

La première étape de la preuve du théorème 1 consiste à remarquer que l'existence d'une densité naturelle α pour $g^{-1}(\mathcal{A})$ équivaut à la convergence vers α au sens de Borel de la fonction caractéristique de \mathcal{A} , ce que nous énonçons sous la forme suivante:

THÉORÈME 2. *Si E , g et \mathcal{A} gardent la même signification que dans l'énoncé du théorème 1, alors la relation (3) est une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $g^{-1}(\mathcal{A})$ possède la densité α .*

On voit maintenant que le théorème 1 est une conséquence de l'équivalence des conditions (1) et (3) pour toute fonction A de la forme $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ où a_n vaut 0 ou 1.

En supposant seulement la suite (a_n) bornée, H. Delange [2] a trouvé de ce résultat une démonstration courte et élégante utilisant la densité dans $L^1(\mathbf{R})$ du sous-espace vectoriel engendré par la famille des fonctions $u \mapsto \exp \left\{ -\frac{1}{2}(u-h)^2 \right\}$, h décrivant \mathbf{R} . De plus il a remarqué que l'on peut déduire l'équivalence de (1) et (3):

- pour la fonction sommatoire d'une suite (a_n) bornée, d'un théorème taubérien général de Karamata (cf. [9], théorème II, page 127, appliqué avec $A(t) = e^{\sqrt{t}}$)
- pour la fonction sommatoire d'une suite (a_n) majorée ou minorée, d'un résultat de Wiener et Martin (cf. [12], théorèmes 1 et 2 appliqués avec $F(x) = e^x$ et en remplaçant a_n par $\frac{a_n}{n!}$) utilisant un théorème taubérien de Wiener [11].

Nous avons obtenu les résultats suivants par une méthode directe, inspirée pour la partie taubérienne de celle de Hardy et Littlewood dans [6].

THÉORÈME 3. *Pour toute fonction A de \mathcal{V} la relation (1) implique la relation (3).*

THÉORÈME 4. *Soit A une fonction de \mathcal{V} .*

S'il existe un nombre complexe β et une fonction $x \mapsto B(x)$ satisfaisant à la relation

$$(\forall c > 0) \quad B(x + c\sqrt{x}) - B(x) = c\beta\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$$

tels que la fonction $x \mapsto A(x) + B(x)$ soit à parties réelle et imaginaire monotones, alors la relation (3) implique la relation (1).

Remarquons que la classe des fonctions $x \mapsto B(x)$ satisfaisant à la condition du théorème 4 est assez étendue; elle contient en effet toutes les fonctions du type

$$B(x) = B_1(x) + o(\sqrt{x})$$

où B_1 est une fonction dérivable telle que, quand x tend vers l'infini,

$$B_1'(x) = \beta + o(1).$$

Dans le cas où A est la fonction sommatoire d'une suite a_n , on obtient, en prenant $B(x) = \lambda [x]$, le corollaire suivant qui, associé aux théorèmes 2 et 3, implique le théorème 1.

COROLLAIRE. *Soit (a_n) une suite de nombres réels. S'il existe un nombre réel λ tel que l'on ait pour n assez grand*

$$a_n \geq -\lambda$$

et si (a_n) tend vers α au sens de Borel, soit

$$(B) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \alpha$$

alors on a

$$(C) \quad (\forall c > 0) \quad \sum_{x \leq n < x + c\sqrt{x}} a_n = c\alpha\sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

Il était connu depuis longtemps (voir [6]) que la condition

$$\sum_{n \leq x} a_n = \alpha x + o(\sqrt{x})$$

(qui implique (C)) est suffisante pour assurer la convergence de (a_n) vers α au sens de Borel. Cependant, nous n'avons trouvé nulle part, dans la littérature consacrée à ce sujet, explicitement énoncé, un théorème d'équivalence des conditions (B) et (C).

Le théorème suivant montre que la restriction $a_n \geq -\lambda$ à laquelle est assujettie l'implication (B) \Rightarrow (C) est optimale.

THÉORÈME 5. Pour toute fonction réelle $t \mapsto \psi(t)$ tendant vers l'infini il existe une suite réelle (a_n) satisfaisant aux trois propriétés suivantes :

(a) $(\forall n \in \mathbf{N}) |a_n| \leq \psi(n)$

(b) (a_n) tend vers 0 au sens de Borel

(c) Pour toute constante positive c l'expression $\frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{x \leq n < x + c\sqrt{x}} a_n$ ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers l'infini.

2. UN LEMME UTILE

Pour tout couple (x, t) de réels positifs, nous posons :

$$\varphi(x, t) = e^{-x} \frac{x^t}{\Gamma(t+1)}.$$

L'énoncé ci-dessous rassemble les principales propriétés de la fonction $\varphi(x, t)$. La démonstration, utilisant la formule de Stirling et d'autres résultats classiques concernant la fonction Γ , est laissée au lecteur.

LEMME 1.

(i) pour $x > 0$ et $|t - x| \leq x^{2/3}$, on a :

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp \left\{ -\frac{(t-x)^2}{2x} \right\} \left(1 + O \left(\frac{1 + |t-x|}{x} \right) + O \left(\frac{|t-x|^3}{x^2} \right) \right)$$

(ii) pour $x > 0$ et $|t - x| \leq \frac{x}{2}$ on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = O \left(\frac{1 + |t-x|}{x} \cdot \varphi(x, t) \right)$$

(iii) pour tout réel positif x , la fonction partielle $t \mapsto \varphi(x, t)$ est positive et atteint son maximum absolu en un point $t(x)$ de l'intervalle $[x - 1, x]$;