Equivalence des conditions 2) et 1')

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

EQUIVALENCE DES CONDITIONS 2) ET 1')

Le support de $\omega \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \Gamma_c(A, \xi(D))$ est un compact de A, ouvert dans A d'après le principe du prolongement analytique et disjoint de P puisque ω a un zéro d'ordre arbitraire en chaque point de P. Ainsi, 2) implique 1'). Conséquence:

Lorsque la surface X *est ouverte,* $\Gamma(X, \xi) \neq 0$.

Pour le voir, on utilise 4) $\Rightarrow$ 1) avec $P = \varnothing$, en prenant pour U un ouvert de X isomorphe par exemple à un disque du plan complexe, de sorte que $\Gamma(U, \xi) \neq 0$.

Montrons maintenant par contraposition que 1') implique 2). Soit K un compact non vide de A ouvert dans A et disjoint de P et soit V un voisinage ouvert de K dans X. On peut supposer V distinct de X lorsque X est compacte, car alors P est non vide, donc $K \neq X$. Soit V_0 une composante connexe de V qui rencontre K. Comme V_0 est une surface de Riemann ouverte, il existe α non nul dans $\Gamma(V_0, \tilde{\xi})$. Prolongeant α à V et restreignant la section ainsi obtenue à K, on arrive à un β non nul dans $\Gamma(K, \tilde{\xi})$. On construit alors un élément non nul γ de $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \Gamma_c(A, \xi(D))$ en prenant $\gamma \mid K = \beta$ et $\gamma \mid A \setminus K = 0$.

L'équivalence entre 5) et 3) se ramène à l'équivalence entre 1) et 3) en remplaçant X par $X \setminus \bar{P}$ et P par $\varnothing$ (que $X \setminus \bar{P}$ ne soit pas nécessairement connexe ne crée pas de difficulté).

Remarque. Les détails techniques de la preuve donnée ont peut-être masqué le fait suivant: le seul théorème d'analyse complexe utilisé a été la dualité de Serre. Ceci apparaît plus clairement si l'on se restreint au cas $P = \varnothing$ (i.e. au théorème d'approximation de Behnke-Stein). De ce point de vue, il serait souhaitable d'avoir un traitement direct de la dualité de Serre en dimension 1 dans le cas ouvert, indépendant du fait qu'une surface de Riemann ouverte est une variété de Stein.