

Utilisation de la dualité de Serre

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

de compact non vide ouvert dans $A \setminus \bar{P}$. D'après le lemme, ceci équivaut à la condition 3).

Pour vérifier l'équivalence de 3) et 4), considérons la suite exacte de cohomologie à supports compacts associée au sous-espace fermé $A \setminus \bar{P}$ de $X \setminus \bar{P}$

$$H_c^0(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) \rightarrow H_c^0(A \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) \rightarrow H_c^1(U, \mathbf{Z}) \rightarrow H_c^1(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z})$$

[3, Théorème 4.10.1, p. 190].

Ici, \mathbf{Z} désigne le faisceau constant et, pour un espace topologique Y , $H_c^0(Y, \mathbf{Z})$ est formé des fonctions localement constantes sur Y à support compact. Le support d'un élément de $H_c^0(Y, \mathbf{Z})$ est un compact ouvert dans Y . D'après le lemme, lorsque Y est localement compact, $H_c^0(Y, \mathbf{Z}) = 0$ si et seulement si Y n'a pas de composante connexe compacte. Ceci montre d'abord que $H_c^0(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) = 0$. Ensuite, que la condition 3) équivaut à la nullité de $H_c^0(A \setminus \bar{P}, \mathbf{Z})$ ou encore, d'après l'exactitude de la suite précédente, à l'injectivité de $H_c^1(U, \mathbf{Z}) \rightarrow H_c^1(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z})$. Par dualité de Poincaré,

$$H_c^1(U, \mathbf{Z}) \cong H_1(U) \text{ et } H_c^1(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) \cong H_1(X \setminus \bar{P}),$$

ce qui achève la preuve de l'équivalence entre 3) et 4).

UTILISATION DE LA DUALITÉ DE SERRE

Désignons par \mathcal{D} l'ensemble des diviseurs effectifs sur X à support contenu dans P . Pour $D \in \mathcal{D}$, soient $\xi(D)$ le produit tensoriel de ξ avec le fibré en droites associé à D et $\tilde{\xi}(D) = \text{Hom}(\xi(D), \kappa)$, où κ est le fibré cotangent de X . Les sections holomorphes de $\xi(D)$ sont interprétés comme sections méromorphes f de ξ telles que $\text{div } f \geq -D$ et les sections holomorphes de $\tilde{\xi}(D)$ comme sections holomorphes ω de $\tilde{\xi} = \text{Hom}(\xi, \kappa)$ telles que $\text{div } \omega \geq D$.

Considérons la suite exacte de cohomologie à supports compacts associée au sous-espace fermé A de X

$$\Gamma_c(X, \tilde{\xi}(D)) \rightarrow \Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D)) \rightarrow H_c^1(U, \tilde{\xi}) \rightarrow H_c^1(X, \tilde{\xi}(D))$$

[3, Théorème 4.10.1, p. 190], où Γ_c désigne les sections à support compact du faisceau des sections holomorphes d'un fibré en droites.

Lorsque la surface X est ouverte (resp. compacte), $\Gamma_c(X, \tilde{\xi}(D)) = 0$ pour tout D (resp. pour D assez grand). D'autre part, par dualité de Serre [5, Théorème 3, p. 21 et Théorème 4, p. 22],

$$H_c^1(U, \tilde{\xi}) \cong \Gamma(U, \xi)' \text{ et } H_c^1(X, \tilde{\xi}(D)) \cong \Gamma(X, \xi(D))',$$

où $\Gamma(\cdot)'$ désigne le dual pour la topologie de la convergence compacte de l'espace des sections holomorphes d'un fibré en droites. On arrive donc à la suite exacte

$$0 \rightarrow \Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D)) \rightarrow \Gamma(U, \xi)' \rightarrow \Gamma(X, \xi(D))'$$

pour D assez grand.

Si $M(D)$ dénote l'image de $\Gamma(X, \xi(D))$ par restriction dans $\Gamma(U, \xi(D))$ et $M(D)^\perp$ l'espace des formes linéaires continues sur $\Gamma(U, \xi(D))$ s'annulant sur $M(D)$, on peut encore écrire $\Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D)) \cong M(D)^\perp$ pour D assez grand.

Les propriétés fonctorielles de l'homomorphisme de jonction $\Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D)) \rightarrow H_c^1(U, \tilde{\xi})$ et de l'isomorphisme de Serre $H_c^1(X, \tilde{\xi}(D)) \cong \Gamma(X, \xi(D))'$ montrent que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D_1)) & \xrightarrow{\sim} & M(D_1)^\perp \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D_2)) & \xrightarrow{\sim} & M(D_2)^\perp \end{array}$$

commute pour $D_1 \leq D_2$. Prenant l'intersection (ou, si l'on veut, la limite projective) des deux membres de l'isomorphie $\Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D)) \cong M(D)^\perp$, on arrive à

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D)) \cong \bigcap_{D \in \mathcal{D}} M(D)^\perp = M^\perp,$$

où $M = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} M(D)$ est formé des restrictions à U des sections méromorphes de ξ au-dessus de X à pôles dans P .

La condition 1) du théorème est que M soit dense dans $\Gamma(U, \xi)$ ou encore, d'après Hahn-Banach, que l'orthogonal M^\perp soit nul:

La condition 1) est équivalente à

$$1') \quad \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D)) = 0.$$