REVÊTEMENTS RAMIFIÉS

REVÊTEMENTS RAMIFIÉS

par Daniel Lines

Introduction

Ce travail ne contient rien de nouveau, mais voudrait simplement servir de référence à l'établissement des propriétés élémentaires de la notion de revêtement ramifié en topologie algébrique. Dans cette partie des mathématiques, on se trouve souvent dans la situation où l'on a un revêtement fini du complémentaire d'une sous-variété de codimension deux dans une variété (par exemple un nœud ou un enlacement de dimension $n - 2$ dans la sphère S^n) que l'on aimerait « étendre » à cette dernière. Cette extension est ce qu'on appelle un revêtement ramifié. Le but de cet article est de montrer que sous des hypothèses très simples on arrive à des théorèmes satisfaisants d'existence et d'unicité des revêtements ramifiés. Pour une définition plus générale des revêtements ramifiés, le lecteur est renvoyé à l'article de R. H. Fox [1]. Je tiens à remercier le professeur Claude Weber, qui m'a initié aux arcanes des revêtements ramifiés, pour son aide et ses utiles suggestions.

Toutes les variétés considérées sont des variétés de classe C^0 compactes, sans bord; elles peuvent avoir plusieurs composantes connexes. On dénote par dim X la dimension de Lebesgue de X.

Si X et Y sont deux variétés de dimension m et n respectivement, $X \subset Y$ (et donc $m \leqslant n$), on dit que X est une sous-variété localement plate de Y si pour tout point x de X, il existe un voisinage U de x dans Y et un homéomorphisme $\varphi : U \to D^n \times D^{n-m}$ où D^k désigne la boule unité ouverte de $\mathbf{R}^k$ tels que $\varphi(U \cap X) = D^m \times \{0\}$ et $\varphi(x) = (0; 0)$. (Un nœud apprivoisé est une sous-variété localement plate de S^3, un nœud sauvage ne l'est pas.)

Définition. Soient M et N deux variétés compactes de dimension $n \geqslant 2$, B une sous-variété localement plate de codimension 2 de N et

$f : M \to N$ une application continue surjective. Soit $A = f^{-1}(B)$. On dit que f est un revêtement ramifié de N (ramifié sur B et d'ensemble de ramification A) si:

1) $f \mid M \setminus A : M \setminus A \longrightarrow N \setminus B$ est un revêtement fini.
2) $N \setminus B$ est exactement l'ensemble des points de N qui possède la propriété de revêtement.
3) Les composantes connexes des $f^{-1}(U)$ où $U \subset N$ est un ouvert quelconque forment une base de la topologie de M.

Remarques. La condition 2) signifie simplement que B est l'ensemble des points « singuliers » et qu'on ne peut pas étendre f en un vrai revêtement sur une partie de B.

La condition 3) assure que A n'est pas trop « gros » (dans un sens à préciser ci-dessous) et empêche par exemple que la projection f: $S^2 \longrightarrow S^2$ qui identifie tout l'hémisphère sud y compris l'équateur en un point ne soit un revêtement ramifié. En effet, f satisfait aux propriétés 1) et 2) avec B = un point, A = hémisphère sud mais l'image réciproque de tout voisinage ouvert de B contient A et contredit donc 3).

LEMME 1. Si $f : M \longrightarrow N$ est un revêtement ramifié sur B, d'ensemble de ramification A alors

i) $\dim A \leqslant n - 2$.
ii) A est sans points intérieurs et ne sépare pas localement M (c'est-à-dire que tout point de A possède un système fondamental de voisinages $\{ U_i \}_{i \in I}$ dans M tel que $U_i \setminus A$ soit connexe pour tout i).

Démonstration de i). Montrons tout d'abord que toute fibre de f est totalement discontinue.

Soit $y \in M$ et $x \in f^{-1}(y)$. Soit C un connexe de $f^{-1}(y)$ qui contient x, il faut voir que C est réduit à x. En effet, il existerait sinon x' distinct de x, $x' \in C$. Par la condition 3) on peut trouver un ouvert U contenant y et tel que $f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$ où les V_i sont connexes disjoints et tels que $x \in V_{i_o}$, $x' \in V_{i_o'}$ avec $i_o \neq i_0'$. Alors $C \cap V_{i_o}$ et $C \cap (\bigcup_{i \neq i_o} V_i)$ sont deux ouverts disjoints non-vides de C dont la réunion égale C, ce qui est absurde. $f^{-1}(y)$ est un sous-espace compact totalement discontinu, il est donc de dimension de Lebesgue zéro. $f \mid A : A \longrightarrow B$ est une application fermée puisque A est compact. Le théorème VI 7 page 91 de [2] [1]) montre que $\dim A \leqslant \dim B = n - 2$.

Démonstration de ii). Si A avait des points intérieurs, A contiendrait une boule ouverte et donc aussi une boule fermée β de dimension n. Comme $\dim \beta \leqslant \dim A$ puisque β est un fermé de A, on aurait $\dim A \geqslant n$, ce qui contredit i). Montrons que A ne sépare pas localement M. Soit a un point de A et V une carte de M centrée en a. On peut supposer que V est homéomorphe à $\mathbf{R}^n$; $A \cap V$ est donc homéomorphe à un fermé F de $\mathbf{R}^n$ et $\dim F \leqslant n - 2$. Considérons $F' = F \cup \{ \infty \} \subset \mathbf{R}^n \cup \{ \infty \} = S^n$. $\dim F' \leqslant n-2$ car on ne peut augmenter la dimension d'un métrique séparable en lui ajoutant un seul point (cf. [2] page 19). Comme $\mathbf{R}^n \setminus F = S^n \setminus F'$, $\mathbf{R}^n \setminus F$ est connexe si et seulement si $\tilde{H}_0 (S^n \setminus F') = 0$ (où $\tilde{H}_0$ est l'homologie (singulière) réduite à coefficients entiers). Par la dualité d'Alexander [2]) $\tilde{H}_0 (S^n \setminus F')$ est isomorphe à $\check{H}^{n-1} (F' : \mathbf{Z})$ qui est nul puisque $\dim F' \leqslant n - 2$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 1. *Si* $f : M \to N$ *est un revêtement ramifié sur* B *d'ensemble de ramification* A, *alors* A *est une sous-variété localement plate de codimension* 2 *de* M. *De plus* $f | A : A \longrightarrow B$ *est un revêtement (non ramifié) fini de* B.

Démonstration. Si $a \in A$ et $b = f(a)$ les propriétés 3) et 4) ainsi que le fait que B est localement plat dans N assurent qu'il existe un voisinage ouvert U de b dans N et un homéomorphisme $\psi : U \longrightarrow W \times D^2$ où $W \subset \mathbf{R}^{n-2}$ est la boule unité et $D^2 \subset \mathbf{C}$ le disque unité tels que $\psi (B \cap U) = W \times \{ 0 \}$, $\psi (b) = (0; 0)$ et que la composante connexe V de $f^{-1} (U)$ qui contient a soit telle que $V \setminus A$ soit connexe. $f | V \setminus A$ est donc un revêtement fini connexe de $U \setminus B$. Comme $U \setminus B$ est homéomorphe à $W \times D^{*2}$ (où D^{*2} désigne le disque ouvert privé de l'origine) la classification des revêtements montre qu'il existe un homéomorphisme $\varphi : V \setminus A \longrightarrow W \times D^{*2}$ tel que

[1]) « Si X et Y sont métriques séparables (par exemple des variétés paracompactes) et $f : X \to Y$ est une application continue fermée telle que $\dim f^{-1}(y) \leqslant m$ pour tout point y de Y, alors $\dim X \leqslant m + \dim Y$».

[2]) Si K est un compact non vide de S^n, $K \neq S^n$ on a: $\check{H}^i (K) \simeq \tilde{H}_{n-i-1} (S^n \setminus K)$ pour $i > 0$, $\check{H}$ désignant la cohomologie de Cech.

$$\begin{array}{ccc} V \setminus A & \xrightarrow{\varphi} & W \times D^{*2}(x; z) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow g \quad \downarrow \\ U \setminus B & \xrightarrow{\psi} & W \times D^{*2}(x; z^k) \end{array} \qquad \text{commute}$$

pour un entier k positif bien défini.

LEMME 2. $f | V \cap A$ est injective (voir la démonstration plus loin).

Le lemme 2 admis on peut prolonger φ en un homéomorphisme $\bar{\varphi} : V \longrightarrow W \times D^2$ défini ainsi sur $V \cap A$: si $x \in V \cap A$ et $\psi \circ f(x) = (w; 0)$ où $w \in W$, on pose alors $\bar{\varphi}(x) = (w; 0)$. Montrons que c'est un homéomorphisme: $\bar{\varphi}$ est continue; en dehors de $A \cap V$ par définition et en $V \cap A$ également car si $x \in V \cap A$, $\bar{\varphi}(x) = (w; 0)$ pour un certain $w \in W$. Soit $W' \times \Delta$ un voisinage de $(w; 0)$ où W' est une boule de centre w dans W et Δ un sous-disque de D^2. On a $g(W' \times \Delta) = W' \times \Delta$ et donc

$$\bar{\varphi}^{-1}(W' \times \Delta) = f^{-1}(\psi^{-1}(W' \times \Delta))$$

qui est bien un voisinage ouvert de x.

$\bar{\varphi}$ est injective car φ l'est et si $x, y \in V \cap A$ sont tels que $\bar{\varphi}(x) = \bar{\varphi}(y)$ on a $f(x) = f(y)$ et donc $x = y$ par le lemme 2.

$\bar{\varphi}$ est surjective car tous les points de $W \times D^{*2}$ sont atteints et si $(w; 0) \in W \times D^2$ $v_n = \varphi^{-1}(w; 1/n)$ $n \in \mathbf{N}$ est une suite de V, comme M est compacte elle a au moins une valeur d'adhérence v qui ne peut être que dans $V \cap A$. Par continuité $\bar{\varphi}(v) = (w; 0)$.

L'invariance du domaine (M est une variété de classe C^o) assure que $\bar{\varphi}$ est un homéomorphisme.

Ceci démontre le fait que A est une sous-variété localement plate de M de codimension 2.

Au-dessus d'un point de B il ne peut y avoir qu'un nombre fini de points de A (un discret dans un compact est fini), d'autre part la construction ci-dessus montre que $f | A$ est un homéomorphisme local et que les fibres ont même cardinal sur les composantes connexes de A . $f | A$ est donc un vrai revêtement.

L'entier k qui apparaît dans la construction est appelé l'*indice de ramification* de f au point a. On voit que cet indice est constant le long de chaque composante connexe de A.

Dans A il peut y avoir des points d'indice de ramification égal à 1 (f est alors un vrai revêtement au voisinage des composantes connexes qui contiennent ces points); la condition 2) de la définition exige qu'il y ait au-dessus de chaque point de B au moins un point d'indice supérieur ou égal à 2.

Démonstration du Lemme 2. Il faut montrer que $f \mid V \cap A$ est injective. Par l'absurde, supposons qu'il existe x et $y \in V \cap A$ $x \neq y$ tels que $f(x) = f(y)$. Soient V_x et V_y des voisinages disjoints de x et y. La condition 3) de la définition assure qu'il existe un voisinage ouvert U' de $f(x) = f(y)$ dans U tel qu'une composante connexe S_x de $f^{-1}(U')$ soit contenue dans V_x et une autre S_y dans V_y. Quitte à restreindre U' on peut supposer que $\psi(U') = W' \times \Delta^2$ où $W' \subset W$ est une boule concentrique contenue dans W et $\Delta^2 \subset D^2$ est un disque centré en 0 de rayon plus petit. $\varphi(S_x \setminus A)$ et $\varphi(S_y \setminus A)$ sont alors deux composantes connexes non vides distinctes de $g^{-1}(W' \times \Delta^{*2})$ ce qui est absurde puisque $g^{-1}(W' \times \Delta^{*2}) = W' \times \Delta^{*2}$ est connexe.

Existence et unicité des revêtements ramifiés

Proposition 2 (Existence). *Soit N une variété de dimension $n \geqslant 2$ et $B \subset N$ une sous-variété localement plate de codimension 2.*

$p : Y \longrightarrow N \setminus B$ un revêtement NON *ramifié fini, alors il existe une variété compacte M de dimension n, une sous-variété $A \subset M$ localement plate de codimension 2 et une application $f : M \longrightarrow N$ telle que : f soit un revêtement ramifié sur une partie B' de B et que $f \mid M \setminus A : M \setminus A \longrightarrow N \setminus B$ soit un revêtement isomorphe à p.*

Remarque. Il se peut que p puisse s'étendre en un revêtement *non* ramifié sur certaines composantes connexes de B, B' est alors une partie propre de B ou même sur tout B, B' est alors vide et f est un vrai revêtement.

Démonstration. Soit $b \in B$. Soit U un voisinage ouvert de b dans N et $\psi : U \longrightarrow W \times D^2$ un homéomorphisme où $W \subset \mathbf{R}^{n-2}$ est la boule-unité et $D^2 \subset \mathbf{C}$ le disque-unité et tel que $\psi(b) = (0; 0)$ $\psi(B \cap U) = W \times \{0\}$.

Soit $U^* = \psi^{-1}(W \times D^{*2})$. $p \mid p^{-1}(U^*) \longrightarrow U^*$ est un revêtement non ramifié fini de U^*. Soit $p^{-1}(U^*) = V_i \cup \ldots V_r$ sa décomposition en composantes connexes. $p \mid V_i \longrightarrow U^*$ est un revêtement fini connexe. Comme W est contractile il existe des homéomorphismes $\varphi_i : V_i \to W \times D^{*2}$ tels que les diagrammes

$$
\begin{tikzcd}
V_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "p"'] & W \times D^{*2}(x; z) \arrow[d] \\
U^* \arrow[r, "\psi"] & W \times D^{*2}(x; z^{k_i})
\end{tikzcd}
$$

commutent pour tout i.

On épaissit V_i en V'_i, en rattachant à chaque V_i « l'âme » $W \times \{0\}$ du cylindre $W \times D^2$ le long de $\varphi_i^{-1}(W \times D^{*2})$. La collection des V'_i lorsque b parcourt tous les points de B et i les composantes connexes de $p^{-1}(U_*)$ correspondantes forment avec les cartes de Y déduites de la structure de revêtement non ramifié, l'atlas d'une variété M de dimension n. A est la sous-variété définie localement par l'âme des cylindres et les φ_i s'étendent en $\varphi'_i : V'_i \longrightarrow W \times D^2$ qui sont des homéomorphismes. Si $x \in V'_i$ on définit $f(x)$ par l'application composée

$$
\begin{array}{ccccccc}
V'_i & \xrightarrow{\varphi'_i} & W \times D^2 & \longrightarrow & W \times D^2 & \xrightarrow{\psi^{-1}} & U \\
 & & (x; z) & \longrightarrow & (x; z^{k_i}) & &
\end{array}
$$

qui est indépendante du choix des cartes de l'atlas. f est donc bien définie et continue.

Démontrons que M est compacte.

Soit (x_ν) une suite de points de M, par compacité de N, $f(x_\nu)$ a une valeur d'adhérence $y \in N$. On choisit un voisinage U de y dans N tel que: si $y \in N \setminus B$ $f^{-1}(U)$ soit réunion disjointe d'ouverts homéomorphes à U, si $y \in B$, U soit homéomorphe à $W \times D^2$ avec $B \cap U$ homéomorphe à $W \times \{0\}$. Dans les deux cas $f^{-1}(U)$ est une réunion finie disjointe d'ouverts T_i de M. On choisit une sous-suite x_ν, $\nu \in N' \subset \mathbf{N}$ telle que $f(x_\nu)$ $\nu \in N'$ converge vers y. Au moins un des T_i contient une infinité de x_ν, $\nu \in N'$. Dans le premier cas, $f | T_i$ est un homéomorphisme sur U, dans le deuxième cas, comme on a « rebouché » partout où il le fallait, T_i est homéomorphe à $W \times D^2$ et $f | T_i$ se comporte comme

$$
\begin{array}{ccc}
W \times D^2 & \longrightarrow & W \times D^2 \\
(x; z) & \longrightarrow & (x; z^{k_i})
\end{array}
$$

Dans les deux cas la sous-suite x_ν, $\nu \in N'$ converge vers un point de T_i.

PROPOSITION 3 (Unicité). *Soient* $M_1 \xrightarrow{f_1} N$ *et* $M_2 \xrightarrow{f_2} N$ *deux revêtements ramifiés d'ensembles de ramification* $A_1 \subset M_1$, $A_2 \subset M_2$, *respectivement et tous deux ramifiés sur* $B \subset N$.

Si $h : M_1 \setminus A_1 \longrightarrow M_2 \setminus A_2$ *est un isomorphisme de revêtement entre* $f_1 \mid M_1 \setminus A_1$ *et* $f_2 \mid M_2 \setminus A_2$, *alors* h *s'étend en un unique homéomorphisme* $H : M_1 \longrightarrow M_2$ *tel que* $H(A_1) = A_2$ *et* $f_2 \circ H = f_1$.

Démonstration. Par hypothèse il existe un homéomorphisme $h : M_1 \setminus A_1 \longrightarrow M_2 \setminus A_2$ tel que

$$\begin{tikzcd} M_1 \setminus A_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f_1"'] & & M_2 \setminus A_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & N \setminus B & \end{tikzcd}$$

commute.

Soit $a_1 \in A_1$, $b = f_1(a_1)$. On sait qu'il existe un voisinage U de b, un voisinage V_1 de a_1 et des homéomorphismes $\bar{\varphi}_1 : V_1 \longrightarrow W \times D^2$ et $\psi : U \longrightarrow W \times D^2$ tels que

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\bar{\varphi}_1"] \arrow[d, "f_1"'] & W \times D^2 \arrow[d] & (x; z) \arrow[d] \\ U \arrow[r, "\psi"] & W \times D^2 & (x; z^k) \end{tikzcd}$$

commute.

$h(V_1 \setminus A_1)$ est connexe; soit V_2 la composante connexe de $f_2^{-1}(U)$ qui contient $h(V_1 \setminus A_1)$. On sait qu'il existe un homéomorphisme $\varphi_2 : V_2 \setminus A_2 \longrightarrow W \times D^{*2}$. Comme M_2 est une variété compacte il doit exister un point $a_2 \in A_2 \cap V_2$ tel que $f_2(a_2) = b$. On peut alors prolonger φ_2 en $\bar{\varphi}_2 : V_2 \longrightarrow W \times D^2$ homéomorphisme, et on sait (lemme 2) que $f_2 \mid V_2 \cap A_2 \longrightarrow U \cap B$ est injective. Pour tout point x de $V_1 \cap A_1$ il n'y a donc qu'un seul point y de $V_2 \cap M_2$ tel que $f_2(y) = f_1(x)$.

On pose alors $H(x) = y$. Ceci étend h à $V_1 \cap M_1$. En particulier $H(a_1) = a_2$ est bien défini et on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & W \times D^2 \arrow[ddrr] & V_1 \arrow[l, "\overline{\varphi}_1"'] \arrow[rr, "H"] \arrow[dr, "f_1"'] & & V_2 \arrow[r, "\overline{\varphi}_2"] \arrow[dl, "f_2"] & W \times D^2 \arrow[ddll] & \\
(x;z) \arrow[drrr] & & & U \arrow[d, "\psi"] & & & (x;z) \arrow[dlll] \\
 & & & W \times D^2 & & & \\
 & & & (x;z^k) & & &
\end{tikzcd}$$

En échangeant les rôles de f_1 et f_2 on construit de la même manière un inverse de H. H est uniquement déterminé par h puisque $M_1 \setminus A_1$ est dense dans M_1.

C.Q.F.D.

N.B. Toutes ces constructions auraient pu être faites dans le cadre des variétés différentiables. Dans ce cas, l'hypothèse de platitude locale de B dans N est trivialement vérifiée et on montre que la structure différentiable provenant du revêtement non ramifié s'étend en une unique structure différentiable sur le revêtement ramifié.

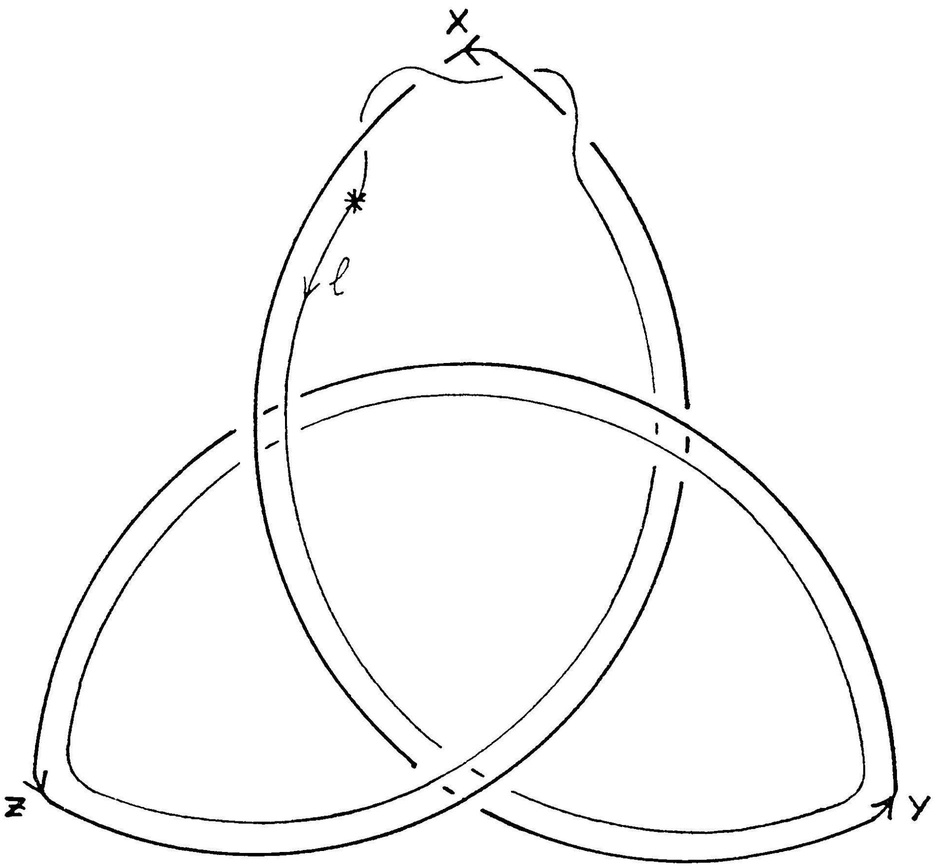
Exemple. Si $K \subset S^3$ est un nœud, G un groupe fini et $\varphi : \pi_1(S^3 \setminus K) \longrightarrow G$ un homomorphisme surjectif, le noyau de φ détermine un revêtement galoisien Y de $S^3 \setminus K$ et donc un revêtement ramifié $f : \hat{Y} \longrightarrow S^3$. Soit H l'image par φ du sous-groupe des éléments périphériques de K (c'est-à-dire le sous-groupe abélien-libre de base un méridien et une longitude du nœud) et F le sous-groupe engendré par l'image du méridien de K. Le nombre de courbes de ramification au-dessus de K est donné par l'indice de H dans G : $[G; H]$ et l'indice de ramification (égal pour toutes les courbes) par l'ordre de F. Le revêtement (non-ramifié) induit par f sur chaque courbe de ramification est un revêtement à $[H; K]$ feuilles. La formule (ordre G) $=$ (ordre K) $\cdot$ $[H; K] \cdot [G; H]$ montre comment les points de la fibre au-dessus d'un point du voisinage tubulaire du nœud se répartissent.

Voici un exemple d'un revêtement pour lequel, contrairement aux revêtements cycliques, métacycliques et la plupart des revêtements calculés, le revêtement induit sur les courbes de ramification n'est pas trivial.

On prend pour K le nœud de trèfle et pour G, $Sl_2(\mathbf{F}_5)$ le groupe des matrices 2×2 à coefficients dans le corps à 5 éléments de déterminant 1. G est d'ordre 120.

$$\pi_1(S^3 \setminus K) = \{xy \mid xyx = yxy\}.$$

On a $z = xyx^{-1}$.



On choisit x pour méridien et pour longitude

$$l = z^{-1}x^{-1}y^{-1}x^2 = xy^{-1}x^{-2}y^{-1}x^2 .$$

$$\varphi : \pi_1(S^3 \setminus K) \longrightarrow G$$

est défini par

$$x \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est bien compatible avec

$$xyx = yxy \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

φ est surjective car les matrices

$$T = \varphi(xyx) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S = \varphi(y^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$V = \varphi(y^{-2}xy^{-1}x^{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

engendrent G (cf. [3], p. 94-95).

On a

$$\varphi(l) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{6}.$$

H est donc un groupe cyclique engendré par $\varphi(l)$. Le calcul montre que $\varphi(l)$ est d'ordre 10 dans $Sl_2(\mathbf{F}_5)$.

Il y a donc $\frac{120}{10} = 12$ courbes de ramification au-dessus de K. Chacune de ces courbes a un indice de ramification égal à 5 et la restriction de f à chaque courbe est un revêtement à 2 feuilles de K.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Fox, R. H. Covering spaces with singularities. *Algebraic geometry and topology, a symposium in honor of S. Lefschetz*. Princeton 1957, pp. 243-257.

[2] Hurewicz-Wallman. *Dimension Theory*. Princeton University Press, 1948.

[3] Coxeter-Moser. *Generators and relations for discrete groups*. 2nd edition. Springer Verlag, 1965.

(Reçu le 8 octobre 1979)

Daniel Lines

Section de Mathématiques
Université de Genève
CH-1211 Genève 24