4. Caractères centriques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

où $\beta = \beta(K/F)$. Mais on a $G_\beta = W_F^{\alpha(R)} . W_K/W_K$ et R vérifie la propriété A. Par suite on a $\dim V^{G_\beta} = 0$ et aussi $\dim V^{G_v} = 0$ pour $v \leqslant \beta$. On a donc

$$a(R) = n \sum_{v=0}^{\beta} \frac{|G_v|}{|G_o|} = n\left(1 + \sum_{v=1}^{\beta} \frac{|G_v|}{|G_o|}\right) = n\,(1+\alpha(K/F))\,,$$

d'où $a(R) = n\big(1+\alpha(R)\big)$. C.Q.F.D.

3.6 Corollaire 1. *Soient R et S deux représentations linéaires de W de degrés n et m respectivement. Supposons que R, S et $R \otimes S$ vérifient la propriété A. Alors on a $a(R\otimes S) \leqslant \sup\big(ma(R), na(S)\big)$ avec égalité si $ma(R) \neq na(S)$.*

Rappelons qu'une représentation linéaire est dite *primordiale* si l'on ne peut abaisser son exposant en la tordant par un caractère. Le corollaire 2 implique immédiatement le théorème 1.5.

Corollaire 2. *Soit R une représentation linéaire de W_F, primordiale, de degré n, et vérifiant la propriété A. Soit χ un caractère de W_F. Alors on a $a(R\otimes\chi) = \sup\big(a(R), na(\chi)\big)$.*

3.7 *Démonstration des corollaires.* Le théorème 3.5 nous permet d'écrire

$$\alpha(R) + 1 = \frac{a(R)}{n} \qquad \text{et} \qquad \alpha(S) + 1 = \frac{a(S)}{m}\,.$$

Mais il est clair que l'on a $\alpha(R\otimes S) \leqslant \sup\big(\alpha(R), \alpha(S)\big)$, avec l'égalité si $\alpha(R) \neq \alpha(S)$. On en déduit le corollaire 1. Prenant $S = \chi$, on obtient le corollaire 2, puisque, par hypothèse, on a toujours $a(R\otimes\chi) \geqslant a(R)$. C.Q.F.D.

Une conséquence immédiate du corollaire 2 est la remarque suivante:

Remarque 3.7. Soit R une représentation linéaire de W_F, irréductible et de degré n. Si $a(R)$ n'est pas multiple de n, R est primordiale.

4. Caractères centriques

4.1 *Rappel et notations.* Si L est une extension finie de F, nous noterons $\tau_L : W_L \to L^\times$ l'application de *réciprocité* définie par la théorie du corps de classes local. On sait qu'elle donne une bijection entre les caractères de $L^\times$ et ceux de W_L, par la formule $\chi \to \chi\circ\tau_L$.

On a également $\tau_L(W_L^u) = U_L^{\lceil u \rceil}$ pour $u > -1$ où $\lceil u \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à u, et U_L^m est le groupe des unités de l'anneau des entiers $\mathfrak{o}_L$ de L, congrues à 1 modulo la puissance m^e de l'idéal maximal $\mathfrak{p}_L$.

4.2 *Dans toute la suite,* r désignera une représentation projective de degré n de W_F, *de type galoisien.* On notera K le corps centrique de r (c'est le corps fixé par Ker (r)), et G le groupe Gal (K/F).

Nous étudierons les relèvements R de r. On définit *le caractère centrique* χ_R de R, qui est un caractère de $K^\times$, par la formule $R(g) = \chi_R \circ \tau_K(g) \,.\, 1_n$ pour $g \in W_K$, où 1_n désigne la matrice d'unité d'ordre n.

Les relèvements de r diffèrent par un caractère de W_F. Si l'on tord R par $\alpha \circ \tau_F$, où α est un caractère de $F^\times$, le caractère χ_R est tordu par $\alpha \circ N_{K/F}$, où $N_{K/F}$ est la norme de $K^\times$ à $F^\times$. Par suite, r détermine la restriction χ_r de χ_R à K^N, noyau de $N_{K/F}$.

Comme χ_R est invariant par G, χ_r est trivial sur K^I, le sous-groupe de $K^\times$ engendré par les éléments x^{s-1}, $x \in K^\times$, $s \in G$. Donc χ_r définit un caractère de $H^{-1}(G, K^\times) = K^N/K^I$. On peut donner une formule cohomologique pour χ_r et prouver la proposition suivante [Bu, Th. 1] ou [He, chap. 6]:

PROPOSITION 4.2. *Un caractère* χ *de* $K^\times$ *est le caractère centrique d'un relèvement de* r *si et seulement s'il prolonge* χ_r.

4.3 Nous noterons $a(\chi)$ l'exposant du caractère χ de $K^\times$, à savoir le plus petit entier m tel que χ soit trivial sur U_K^m. On a $a(\chi) = a(\chi \circ \tau_K)$. Nous notons $e(K/F)$ l'indice de ramification de K sur F, et $d(K/F)$ l'exposant différental de cette extension.

THÉORÈME 4.3. *Soit* R *un relèvement de* r, *tel que l'image par* R *de* $W_F^{\alpha(R)} \cap W_K$ *ne laisse fixe aucun élément non nul de* $\mathbf{C}^n$. *Alors on a :*

$$e(K/F)\, a(R) = n\big(d(K/F) + a(\chi_R)\big)$$

et

$$a(\chi_R) \geqslant \beta(K/F) + 1\,.$$

Cette dernière inégalité est stricte si W_K *contient* $W_F^{\alpha(R)}$.

L'égalité concernant $a(R)$ découle immédiatement de [Bu, prop. 2, p. 25]. Pour une généralisation, voir [He, chap. 7].

4.4 L'inégalité à démontrer s'écrit encore

$$e(K/F)\, a(R) \geqslant n\big(d(K/F) + \beta(K/F) + 1\big)\,.$$

Par hypothèse, la restriction de R à $W_F^{\alpha(R)} \cap W_K$ est sans point fixe non-trivial. Par suite, R vérifie la propriété A, et, utilisant le théorème 3.5, l'on voit qu'il faut démontrer:

$$e(K/F)\big(\alpha(R) + 1\big) \geqslant d(K/F) + \beta(K/F) + 1 .$$

LEMME 4.4. *On a*

$$e(K/F)\big(\alpha(K/F) + 1\big) = d(K/F) + \beta(K/F) + 1 .$$

Démonstration. Rappelons que $G = \mathrm{Gal}\,(K/F)$. Par [Se, prop. 4, p. 72], on a

$$d(K/F) = \sum_{i=0}^{\infty} (\,|\,G_i\,| - 1) = \sum_{i=0}^{\beta\,(K/F)} (\,|\,G_i\,| - 1)$$

d'où

$$d(K/F) + \beta(K/F) + 1 = \sum_{i=0}^{\beta(K/F)} |\,G_i\,| = |\,G_o\,| \left(1 + \sum_{i=1}^{\beta(K/F)} \frac{|\,G_i\,|}{|\,G_o\,|}\right) =$$

$$= |\,G_o\,| \big(1 + \varphi_{K/F}(\beta(K/F))\big) = e(K/F)\big(\alpha(K/F) + 1\big) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

4.5 Il suffit donc de démontrer l'inégalité $\alpha(R) \geqslant \alpha(K/F)$, qui est claire puisque la restriction de r à $W_F^{\alpha(K/F)}$, donc aussi celle de R, est non-triviale. De plus, si l'on a $W_F^{\alpha(R)} \subset W_K$, on a $W_F^{\alpha(R)} \underset{\neq}{\subset} W_F^{\alpha(K/F)}$ d'où $\alpha(R) > \alpha(K/F)$ et l'inégalité est stricte. C.Q.F.D.

La remarque 1 qui suit [Bu, prop. 2, p. 25] donne aussitôt le corollaire suivant au théorème 4.3:

COROLLAIRE. *Si la restriction de r à P_F est irréductible, on a*

$$e(K/F)\, a(R) = n\big(d(K/F) + a(\chi_R)\big)$$

et

$$a(\chi_R) > \beta(K/F) + 1 .$$

5. REPRÉSENTATIONS PRIMITIVES

5.1 Nous conservons les hypothèses et notations précédentes. Ainsi r est une représentation projective de W_F, de type galoisien et de degré n. On notera F_1 la plus grande extension modérément ramifiée de F contenue dans le corps centrique K de r, et r_1 la restriction de r à W_{F_1}. Le groupe $G_1 = \mathrm{Gal}\,(K/F_1)$ est le sous-groupe de ramification sauvage de $G = \mathrm{Gal}\,(K/F)$.