

4. Caractères centraux

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

où $\beta = \beta(K/F)$. Mais on a $G_\beta = W_F^{\alpha(R)} \cdot W_K/W_K$ et R vérifie la propriété A . Par suite on a $\dim V^{G_\beta} = 0$ et aussi $\dim V^{G_v} = 0$ pour $v \leq \beta$. On a donc

$$a(R) = n \sum_{v=0}^{\beta} \frac{|G_v|}{|G_o|} = n \left(1 + \sum_{v=1}^{\beta} \frac{|G_v|}{|G_o|} \right) = n(1 + \alpha(K/F)),$$

d'où $a(R) = n(1 + \alpha(R))$. C.Q.F.D.

3.6 COROLLAIRE 1. Soient R et S deux représentations linéaires de W de degrés n et m respectivement. Supposons que R, S et $R \otimes S$ vérifient la propriété A . Alors on a $a(R \otimes S) \leq \sup(ma(R), na(S))$ avec égalité si $ma(R) \neq na(S)$.

Rappelons qu'une représentation linéaire est dite *primordiale* si l'on ne peut abaisser son exposant en la tordant par un caractère. Le corollaire 2 implique immédiatement le théorème 1.5.

COROLLAIRE 2. Soit R une représentation linéaire de W_F , primordiale, de degré n , et vérifiant la propriété A . Soit χ un caractère de W_F . Alors on a $a(R \otimes \chi) = \sup(a(R), na(\chi))$.

3.7 Démonstration des corollaires. Le théorème 3.5 nous permet d'écrire

$$\alpha(R) + 1 = \frac{a(R)}{n} \quad \text{et} \quad \alpha(S) + 1 = \frac{a(S)}{m}.$$

Mais il est clair que l'on a $\alpha(R \otimes S) \leq \sup(\alpha(R), \alpha(S))$, avec l'égalité si $\alpha(R) \neq \alpha(S)$. On en déduit le corollaire 1. Prenant $S = \chi$, on obtient le corollaire 2, puisque, par hypothèse, on a toujours $a(R \otimes \chi) \geq a(R)$. C.Q.F.D.

Une conséquence immédiate du corollaire 2 est la remarque suivante:

Remarque 3.7. Soit R une représentation linéaire de W_F , irréductible et de degré n . Si $a(R)$ n'est pas multiple de n , R est primordiale.

4. CARACTÈRES CENTRIQUES

4.1 *Rappel et notations.* Si L est une extension finie de F , nous noterons $\tau_L : W_L \rightarrow L^\times$ l'application de *réciprocité* définie par la théorie du corps de classes local. On sait qu'elle donne une bijection entre les caractères de L^\times et ceux de W_L , par la formule $\chi \rightarrow \chi \circ \tau_L$.

On a également $\tau_L(W_L^u) = U_L^{\lceil u \rceil}$ pour $u > -1$ où $\lceil u \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à u , et U_L^m est le groupe des unités de l'anneau des entiers \mathfrak{o}_L de L , congrues à 1 modulo la puissance m^e de l'idéal maximal \mathfrak{p}_L .

4.2 Dans toute la suite, r désignera une représentation projective de degré n de W_F , de type galoisien. On notera K le corps centrique de r (c'est le corps fixé par $\text{Ker}(r)$), et G le groupe $\text{Gal}(K/F)$.

Nous étudierons les relèvements R de r . On définit le caractère centrique χ_R de R , qui est un caractère de K^\times , par la formule $R(g) = \chi_R \circ \tau_K(g) \cdot 1_n$ pour $g \in W_K$, où 1_n désigne la matrice d'unité d'ordre n .

Les relèvements de r diffèrent par un caractère de W_F . Si l'on tord R par $\alpha \circ \tau_F$, où α est un caractère de F^\times , le caractère χ_R est tordu par $\alpha \circ N_{K/F}$, où $N_{K/F}$ est la norme de K^\times à F^\times . Par suite, r détermine la restriction χ_r de χ_R à K^N , noyau de $N_{K/F}$.

Comme χ_R est invariant par G , χ_r est trivial sur K^I , le sous-groupe de K^\times engendré par les éléments x^{s-1} , $x \in K^\times$, $s \in G$. Donc χ_r définit un caractère de $H^{-1}(G, K^\times) = K^N/K^I$. On peut donner une formule cohomologique pour χ_r et prouver la proposition suivante [Bu, Th. 1] ou [He, chap. 6]:

PROPOSITION 4.2. *Un caractère χ de K^\times est le caractère centrique d'un relèvement de r si et seulement s'il prolonge χ_r .*

4.3 Nous noterons $a(\chi)$ l'exposant du caractère χ de K^\times , à savoir le plus petit entier m tel que χ soit trivial sur U_K^m . On a $a(\chi) = a(\chi \circ \tau_K)$. Nous notons $e(K/F)$ l'indice de ramification de K sur F , et $d(K/F)$ l'exposant différentiel de cette extension.

THÉORÈME 4.3. *Soit R un relèvement de r , tel que l'image par R de $W_F^{\alpha(R)} \cap W_K$ ne laisse fixe aucun élément non nul de \mathbb{C}^n . Alors on a :*

$$e(K/F) a(R) = n(d(K/F) + a(\chi_R))$$

et

$$a(\chi_R) \geq \beta(K/F) + 1.$$

Cette dernière inégalité est stricte si W_K contient $W_F^{\alpha(R)}$.

L'égalité concernant $a(R)$ découle immédiatement de [Bu, prop. 2, p. 25]. Pour une généralisation, voir [He, chap. 7].

4.4 L'inégalité à démontrer s'écrit encore

$$e(K/F) a(R) \geq n(d(K/F) + \beta(K/F) + 1).$$

Par hypothèse, la restriction de R à $W_F^{\alpha(R)} \cap W_K$ est sans point fixe non-trivial. Par suite, R vérifie la propriété A , et, utilisant le théorème 3.5, l'on voit qu'il faut démontrer:

$$e(K/F)(\alpha(R) + 1) \geq d(K/F) + \beta(K/F) + 1.$$

LEMME 4.4. *On a*

$$e(K/F)(\alpha(K/F) + 1) = d(K/F) + \beta(K/F) + 1.$$

Démonstration. Rappelons que $G = \text{Gal}(K/F)$. Par [Se, prop. 4, p. 72], on a

$$d(K/F) = \sum_{i=0}^{\infty} (|G_i| - 1) = \sum_{i=0}^{\beta(K/F)} (|G_i| - 1)$$

d'où

$$\begin{aligned} d(K/F) + \beta(K/F) + 1 &= \sum_{i=0}^{\beta(K/F)} |G_i| = |G_0| \left(1 + \sum_{i=1}^{\beta(K/F)} \frac{|G_i|}{|G_0|} \right) = \\ &= |G_0| (1 + \varphi_{K/F}(\beta(K/F))) = e(K/F)(\alpha(K/F) + 1) \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

4.5 Il suffit donc de démontrer l'inégalité $\alpha(R) \geq \alpha(K/F)$, qui est claire puisque la restriction de r à $W_F^{\alpha(K/F)}$, donc aussi celle de R , est non-triviale. De plus, si l'on a $W_F^{\alpha(R)} \subset W_K$, on a $W_F^{\alpha(R)} \subsetneq W_F^{\alpha(K/F)}$ d'où $\alpha(R) > \alpha(K/F)$ et l'inégalité est stricte. C.Q.F.D.

La remarque 1 qui suit [Bu, prop. 2, p. 25] donne aussitôt le corollaire suivant au théorème 4.3:

COROLLAIRE. *Si la restriction de r à P_F est irréductible, on a*

$$e(K/F) a(R) = n(d(K/F) + a(\chi_R))$$

et

$$a(\chi_R) > \beta(K/F) + 1.$$

5. REPRÉSENTATIONS PRIMITIVES

5.1 Nous conservons les hypothèses et notations précédentes. Ainsi r est une représentation projective de W_F , de type galoisien et de degré n . On notera F_1 la plus grande extension modérément ramifiée de F contenue dans le corps centrique K de r , et r_1 la restriction de r à W_{F_1} . Le groupe $G_1 = \text{Gal}(K/F_1)$ est le sous-groupe de ramification sauvage de $G = \text{Gal}(K/F)$.