

## 4. Le théorème fondamental (Splitting principle)

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

#### 4. LE THÉORÈME FONDAMENTAL (SPLITTING PRINCIPLE)

*Définition 4.1* [1], [2]. Un pré- $\lambda$ -anneau  $R$  est un  $\lambda$ -anneau (special  $\lambda$ -ring) si les  $\lambda$ -opérations vérifient les propriétés supplémentaires [1], trivialement vérifiées sur les sommes d'éléments de rang 1 :

- (i)  $\lambda_t(1) = 1 + t$
- (ii)  $\lambda^n(xy) = P_n(\lambda^1(x), \dots, \lambda^n(x); \lambda^1(y), \dots, \lambda^n(y))$
- (iii)  $\lambda^m(\lambda^n(x)) = P_{mn}(\lambda^1(x), \dots, \lambda^{nm}(x))$

où  $P_n$  et  $P_{mn}$  sont des polynômes à coefficients entiers (donc définis par leur valeur sur les sommes d'éléments de rang 1). Le sous-ensemble de  $R$  vérifiant les formules (ii) et (iii) est fermé pour l'addition [1], [2]. Une forme faible (équivalente si  $R$  est sans torsion en tant que groupe abélien) de ces conditions s'exprime aisément en termes d'opérations d'Adams [1], [2]:

- (1)  $\psi^k : R \rightarrow R$  est un endomorphisme d'anneau (et même de  $\lambda$ -anneau)
- (2)  $\psi^k \circ \psi^l = \psi^l \circ \psi^k = \psi^{kl}$ .

Nous désirons montrer que  $R_A(G)$  est un  $\lambda$ -anneau. Si  $P \in \mathcal{P}_G^A$ ,  $P$  est l'image d'un projecteur dans un  $AG$ -module  $V$ ,  $A$ -libre de type fini

$$p^2 = p : V \rightarrow V \quad (\text{Im } p = P)$$

(par exemple  $V = P \oplus Q$  où  $Q$  est un inverse projectif de  $P$  muni de la  $G$ -action triviale). En choisissant une  $A$ -base de  $V$ ,  $p \in M_n(A)$  et, si  $\sigma : G \rightarrow GL_n(A)$  est de la forme matricielle de  $V$ , on a

$$V = \sigma^*(A_{id}^n).$$

De même, si  $P' \in \mathcal{P}_A^G$ , on peut écrire

$$P' = \text{im}(p' : V' \rightarrow V'), \quad p'^2 = p' \quad \text{et} \quad V' = \sigma'^*(A_{id}^m).$$

Rappelons que  $R_A(M_n \times M_m)$  est le groupe de Grothendieck de la catégorie  $\mathcal{P}_A(M_n \times M_m)$  des  $A(M_n \times M_m)$ -comodules  $A$ -projectifs de type fini où  $A(M_n \times M_m) = A[X_{11}, \dots, X_{nn}; Y_{11}, \dots, Y_{mm}]$ . Comme on l'a vu,  $R_A(M_n \times M_m)$  est un pré- $\lambda$ -anneau. Le fait crucial pour la suite est le

LEMME 4.2.  $(p, p')$  définissent un homomorphisme de pré- $\lambda$ -anneaux

$$\alpha(p, p') : R_{\mathbf{Z}}(M_n \times M_m) \rightarrow R_A(G)$$

tel que  $[P], [P'] \in \alpha(p, p') R_{\mathbf{Z}}(M_n \times M_m)$ .

*Preuve.* Si  $E$  est un  $\mathbf{Z}(M_n \times M_m)$ -comodule, on lui associe  $e_A(E) = A \otimes_{\mathbf{Z}} E$  muni de l'action canonique de  $M_n(A) \times M_m(A)$  définie sous 2.2. Ainsi le couple  $(p, p')$  de matrices agit comme un projecteur sur  $e_A(E)$ . Le  $A$ -module projectif image de ce projecteur  $(p, p') \cdot e_A(E)$  est muni d'une action du groupe  $G$  car

$$\sigma(g) \cdot p = p \cdot \sigma(g) \quad \text{et} \quad \sigma'(g) \cdot p' = p' \cdot \sigma'(g')$$

par hypothèse. On pose alors

$$\alpha(p, p')(E) = (p, p') \cdot e_A(E).$$

Maintenant, si  $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$  est exacte dans  $\mathcal{P}_{\mathbf{Z}}(M_n \times M_m)$ , alors

$$0 \rightarrow (p, p') \cdot e_A(E') \rightarrow (p, p') \cdot e_A(E) \rightarrow (p, p') \cdot e_A(E'') \rightarrow 0$$

est exacte dans  $\mathcal{P}_A^G$  (en tant que  $A$ -module,  $e_A(E) = e_A(E') \oplus e_A(E'')$  et l'action de  $(p, p')$  sur  $e_A(E') \oplus e_A(E'')$  est de la forme  $\begin{pmatrix} p & p' \\ 0 & (p, p')^* \end{pmatrix}$ ). Enfin, par functorialité des puissances extérieures,

$$(p, p') \cdot \lambda^k(e_A(E)) = \lambda^k((p, p') \cdot e_A(E)).$$

Pour terminer, on remarque que  $[P] = \alpha(p, p') [Z_{p_1}^n]$  et  $[P'] = \alpha(p, p') [Z_{p_2}^m]$  où  $Z_{p_1}^n$  (resp.  $Z_{p_2}^m$ ) est le  $\mathbf{Z}(M_n \times M_m)$ -comodule défini par

$$\begin{aligned} d_{Z_{p_1}^n} : \mathbf{Z}^n &\rightarrow \mathbf{Z}[X_{11}, \dots, X_{nn}; Y_{11}, \dots, Y_{mm}] \otimes \mathbf{Z}^n; \quad e_i \mapsto \sum_{j=1}^n X_{ji} \otimes e_j \\ \text{(resp. } d_{Z_{p_2}^m} : \mathbf{Z}^m &\rightarrow \mathbf{Z}[X_{11}, \dots, X_{nn}; Y_{11}, \dots, Y_{mm}] \otimes \mathbf{Z}^m; \\ &e_i \mapsto \sum_{j=1}^m Y_{ji} \otimes e_j). \end{aligned} \quad \square$$

Si  $F$  est un corps, on peut, en vertu du lemme 3.3, identifier  $R_F(M_n \times M_m)$  au sous-anneau de  $R_F(GL_n \times GL_m)$  engendré par les représentations ne faisant intervenir ni  $\det(X)^{-1}$ , ni  $\det(Y)^{-1}$ . Par [9, lemme 5], les représentations polynomiales simples de  $GL_n \times GL_m$  sur un corps sont classifiées par les poids dominants. Comme la condition de se prolonger à  $M_n \times M_m$  (c'est-à-dire de ne faire intervenir ni  $\det(X)^{-1}$ , ni  $\det(Y)^{-1}$ ) se lit sur

les poids, la démonstration de J.-P. Serre [9, théorème 5] passe au cas du monoïde  $M_n \times M_m$  et livre que l'homomorphisme d'extension des scalaires :

$$i : R_Z(M_n \times M_m) \xrightarrow{\sim} R_Q(M_n \times M_m)$$

est un isomorphisme.

PROPOSITION 4.3. *Le pré- $\lambda$ -anneau  $R_Z(M_n \times M_m)$  est un  $\lambda$ -anneau.*

*Preuve.* Pour établir les formules (ii) et (iii) de la définition 4.1, on utilise un résultat de J.-P. Serre [9, théorème 4]:

si  $R_A(T_n)$  désigne l'anneau des représentations polynomiales du tore  $T_n$  (matrices diagonales) d'algèbre de Hopf  $A(T_n) = A[X_1, \dots, X_n]$ , l'homomorphisme de restriction :

$$R_Q(GL_n \times GL_m) \xrightarrow{>} R_Q(T_{n+m})$$

est injectif. Donc la composition

$$R_Z(M_n \times M_m) \xrightarrow{\sim} R_Q(M_n \times M_m) \xrightarrow{>} R_Q(GL_n \times GL_m) \xrightarrow{>} R_Q(T_{n+m})$$

est injective. Or les représentations polynomiales du tore  $T_{n+m}$  sont sommes de représentation de rang 1. □

THÉORÈME 4.4. *Le pré- $\lambda$ -anneau  $R_A(G)$  est un  $\lambda$ -anneau.*

*Preuve.* Il suffit d'établir les formules (ii) et (iii) de la définition 4.1 pour des classes  $[P]$  et  $[Q]$  d'objets de  $\mathcal{P}_A^G$  (générateurs additifs de  $R_A(G)$ ). Par le lemme 4.2, on se réduit à vérifier ces formules dans  $R_Z(M_n \times M_m)$ , ce qu'on a fait à la proposition 4.3. □

PROPOSITION 4.5. *Si  $A$  est un anneau de caractéristique  $p > 0$ , alors*

$$\psi^p = \text{Frob}_* : R_A(G) \rightarrow R_A(G)$$

*Preuve.* Comme au théorème 4.4, il suffit de montrer que

$$\psi^p = \text{Frob}_* : R_{F_p}(M_n) \rightarrow R_{F_p}(M_n).$$

Or,  $R_{F_p}(M_n) \xrightarrow{>} R_{F_p}(GL_n)$  est injective, et l'égalité a déjà été établie sur  $R_{F_p}(GL_n)$  au corollaire 3.7. □