4. Le théorème fondamental (Splitting principle)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

4. Le théorème fondamental (Splitting principle)

Définition 4.1 [1], [2]. *Un pré-λ-anneau R est un λ-anneau (special λ-ring) si les λ-opérations vérifient les propriétés supplémentaires* [1], *trivialement vérifiées sur les sommes d'éléments de rang 1 :*

(i) $\lambda_t(1) = 1 + t$

(ii) $\lambda^n(xy) = P_n(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^n(x); \lambda^1(y), \ldots, \lambda^n(y))$

(iii) $\lambda^m(\lambda^n(x)) = P_{mn}(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^{nm}(x))$

où P_n et P_{mn} sont des polynômes à coefficients entiers (donc définis par leur valeur sur les sommes d'éléments de rang 1). Le sous-ensemble de R vérifiant les formules (ii) et (iii) est fermé pour l'addition [1], [2]. Une forme faible (équivalente si R est sans torsion en tant que groupe abélien) de ces conditions s'exprime aisément en termes d'opérations d'Adams [1], [2]:

(1) $\psi^k : R \to R$ est un endomorphisme d'anneau (et même de λ-anneau)

(2) $\psi^k \circ \psi^l = \psi^l \circ \psi^k = \psi^{kl}$.

Nous désirons montrer que $R_A(G)$ est un λ-anneau. Si $P \in \mathscr{P}_G^A$, P est l'image d'un projecteur dans un AG-module V, A-libre de type fini

$$p^2 = p : V \to V \quad (\operatorname{Im} p = P)$$

(par exemple $V = P \oplus Q$ où Q est un inverse projectif de P muni de la G-action triviale). En choisissant une A-base de V, $p \in M_n(A)$ et, si $\sigma : G \to GL_n(A)$ est de la forme matricielle de V, on a

$$V = \sigma^*(A_{id}^n).$$

De même, si $P' \in \mathscr{P}_A^G$, on peut écrire

$$P' = \operatorname{im}(p' : V' \to V'), \; p'^2 = p' \quad \text{et} \quad V' = \sigma'^*(A_{id}^m).$$

Rappelons que $R_A(M_n \times M_m)$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathscr{P}_A(M_n \times M_m)$ des $A(M_n \times M_m)$-comodules A-projectifs de type fini où $A(M_n \times M_m) = A[X_{11}, \ldots, X_{nn}; Y_{11}, \ldots, Y_{mm}]$. Comme on l'a vu, $R_A(M_n \times M_m)$ est un pré-λ-anneau. Le fait crucial pour la suite est le

LEMME 4.2. *(p, p') définissent un homomorphisme de pré-λ-anneaux*

$$\alpha(p, p') : R_{\mathbf{Z}}(M_n \times M_m) \to R_A(G)$$

tel que $[P]$, $[P'] \in \alpha(p, p')\, R_{\mathbf{Z}}(M_n \times M_m)$.

Preuve. Si E est un $\mathbf{Z}(M_n \times M_m)$-comodule, on lui associe $e_A(E) = A \otimes_{\mathbf{Z}} E$ muni de l'action canonique de $M_n(A) \times M_m(A)$ définie sous 2.2. Ainsi le couple (p, p') de matrices agit comme un projecteur sur $e_A(E)$. Le A-module projectif image de ce projecteur $(p, p') \cdot e_A(E)$ est muni d'une action du groupe G car

$$\sigma(g) \cdot p = p \cdot \sigma(g) \qquad \text{et} \qquad \sigma'(g) \cdot p' = p' \cdot \sigma'(g')$$

par hypothèse. On pose alors

$$\alpha(p, p')(E) = (p, p') \cdot e_A(E)\,.$$

Maintenant, si $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ est exacte dans $\mathscr{P}_{\mathbf{Z}}(M_n \times M_m)$, alors

$$0 \to (p, p') \cdot e_A(E') \to (p, p') \cdot e_A(E) \to (p, p') \cdot e_A(E'') \to 0$$

est exacte dans $\mathscr{P}_A^G$ (en tant que A-module, $e_A(E) = e_A(E') \oplus e_A(E'')$ et l'action de (p, p') sur $e_A(E') \oplus e_A(E'')$ est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} (p,p') & * \\ 0 & (p,p') \end{smallmatrix}\right)$). Enfin, par fonctorialité des puissances extérieures,

$$(p, p') \cdot \lambda^k(e_A(E)) = \lambda^k((p, p') \cdot e_A(E))\,.$$

Pour terminer, on remarque que $[P] = \alpha(p, p')\,[\mathbf{Z}^n_{p_1}]$ et $[P'] = \alpha(p, p')\,[\mathbf{Z}^m_{p_2}]$ où $\mathbf{Z}^n_{p_1}$ (resp. $\mathbf{Z}^m_{p_2}$) est le $\mathbf{Z}(M_n \times M_m)$-comodule défini par

$$d_{\mathbf{Z}^n_{p_1}} : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z}[X_{11}, \ldots, X_{nn}; Y_{11}, \ldots, Y_{mm}] \otimes \mathbf{Z}^n\,;\; e_i \mapsto \textstyle\sum_{j=1}^n X_{ji} \otimes e_j$$
$$\text{(resp. } d_{\mathbf{Z}^m_{p_2}} : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z}[X_{11}, \ldots, X_{nn}; Y_{11}, \ldots, Y_{mm}] \otimes \mathbf{Z}^m\,;$$
$$e_i \mapsto \textstyle\sum_{j=1}^m Y_{ji} \otimes e_j)\,. \qquad \square$$

Si F est un corps, on peut, en vertu du lemme 3.3, identifier $R_F(M_n \times M_m)$ au sous-anneau de $R_F(GL_n \times GL_m)$ engendré par les représentations ne faisant intervenir ni $\det(X)^{-1}$, ni $\det(Y)^{-1}$. Par [9, lemme 5], les représentations polynomiales simples de $GL_n \times GL_m$ sur un corps sont classifiées par les poids dominants. Comme la condition de se prolonger à $M_n \times M_m$ (c'est-à-dire de ne faire intervenir ni $\det(X)^{-1}$, ni $\det(Y)^{-1}$) se lit sur les poids, la démonstration de J.-P. Serre [9, théorème 5] passe au cas du monoïde $M_n \times M_m$ et livre que l'homomorphisme d'extension des scalaires:

$$i : R_{\mathbf{Z}}(M_n \times M_m) \xrightarrow{\sim} R_{\mathbf{Q}}(M_n \times M_m)$$

est un isomorphisme.

PROPOSITION 4.3. *Le pré-λ-anneau* $R_{\mathbf{Z}}(M_n \times M_m)$ *est un λ-anneau.*

Preuve. Pour établir les formules (ii) et (iii) de la définition 4.1, on utilise un résultat de J.-P. Serre [9, théorème 4]:

si $R_A(T_n)$ désigne l'anneau des représentations polynomiales du tore T_n (matrices diagonales) d'algèbre de Hopf $A(T_n) = A[X_1, ..., X_n]$, l'homomorphisme de restriction:

$$R_{\mathbf{Q}}(GL_n \times GL_m) \rightarrowtail R_{\mathbf{Q}}(T_{n+m})$$

est injectif. Donc la composition

$$R_{\mathbf{Z}}(M_n \times M_m) \xrightarrow{\sim} R_{\mathbf{Q}}(M_n \times M_m) \rightarrowtail R_{\mathbf{Q}}(GL_n \times GL_m) \rightarrowtail R_{\mathbf{Q}}(T_{n+m})$$

est injective. Or les représentations polynomiales du tore T_{n+m} sont sommes de représentation de rang 1. $\square$

THÉORÈME 4.4. *Le pré-λ-anneau* $R_A(G)$ *est un λ-anneau.*

Preuve. Il suffit d'établir les formules (ii) et (iii) de la définition 4.1 pour des classes $[P]$ et $[Q]$ d'objets de $\mathcal{P}_A^G$ (générateurs additifs de $R_A(G)$). Par le lemme 4.2, on se réduit à vérifier ces formules dans $R_{\mathbf{Z}}(M_n \times M_m)$, ce qu'on a fait à la proposition 4.3. $\square$

PROPOSITION 4.5. *Si* A *est un anneau de caractéristique* $p > 0$, *alors*

$$\psi^p = \mathrm{Frob}_* : R_A(G) \to R_A(G)$$

Preuve. Comme au théorème 4.4, il suffit de montrer que

$$\psi^p = \mathrm{Frob}_* : R_{\mathbf{F}_p}(M_n) \to R_{\mathbf{F}_p}(M_n).$$

Or, $R_{\mathbf{F}_p}(M_n) \rightarrowtail R_{\mathbf{F}_p}(GL_n)$ est injective, et l'égalité a déjà été établie sur $R_{\mathbf{F}_p}(GL_n)$ au corollaire 3.7. $\square$