

3. Le pré--anneau $R_A(H)$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

2.2. La donnée d'un $A (GL_n)$ -comodule E fournit pour toute A -algèbre A' un $A' [GL_n (A')]$ -module par :

$$A' [GL_n (A')] \otimes_A E \xrightarrow{id \otimes d_E} A' [GL_n (A')] \otimes_A A (GL_n) \otimes E \xrightarrow{év \otimes id} A' \otimes_A E$$

où $év : A' [GL_n (A')] \otimes_A A (GL_n) \rightarrow A'$ est l'homomorphisme d'évaluation. Par suite, on a des *homomorphismes d'anneaux canoniques*

$$e_{A'} : R_A (GL_n) \rightarrow R_{A'} (GL_n (A')) ; E \mapsto A' \otimes_A E .$$

Remarque. D'une manière générale, si H est une algèbre de Hopf qui est de plus un A -module plat, on notera $R_A (H)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathcal{P}_A (H)$ des H -comodules qui sont projectifs de type fini en tant que A -modules. Comme pour $R_A (GL_n)$, on montre que $R_A (H)$ est un anneau commutatif avec unité. Nous utiliserons les algèbres de Hopf

$$\begin{aligned} A (M_n) &= A [X_{11}, \dots, X_{nn}], A (T_n) \\ &= A [X_1, \dots, X_n], A (M_n \times M_m) = A [X_{11}, \dots, X_{nn}; Y_{11}, \dots, Y_{mm}] , \end{aligned}$$

dont les groupes de Grothendieck $R_A (H)$ s'interprètent comme représentations polynomiales de M_n ($n \times n$ matrices), T_n (matrices diagonales) et $M_n \times M_m$ respectivement.

3. LE PRÉ- λ -ANNEAU $R_A (H)$

Définition 3.1 [1], [2]. Un pré- λ -anneau (λ -ring) R est un anneau commutatif avec unité, muni d'une suite d'opérations $\{\lambda^n\}_{n \geq 0}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $\lambda^0 (x) = 1$ et $\lambda^1 (x) = x$
- (ii) $\lambda^k (x+y) = \sum_{i=0}^k \lambda^i (x) \cdot \lambda^{k-i} (y) .$

En introduisant les séries formelles $\lambda_t (x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i (x) t^i$ et

$$\psi_{-t} (x) = -t \frac{d}{dt} (\log \lambda_t (x)) = -t \left(\frac{d}{dt} \lambda_t (x) \right) (\lambda_t (x))^{-1} ,$$

on définit une suite d'opérations $\psi^k : R \rightarrow R$, $k > 0$ (*opérations d'Adams*) par

$$\psi_{-t} (x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \psi^i (x) t^i .$$

On vérifie immédiatement que les opérations ψ^k sont des endomorphismes de groupe et que $\psi^1(x) = x$. D'autre part, on tire de la définition la formule [1]:

$$(*) \quad \psi^k - \psi^{k-1} \cdot \lambda^1 + \dots + (-1)^{k-1} \psi^1 \cdot \lambda^{k-1} + (-1)^k k \lambda^k = 0$$

qui peut servir de définition par récurrence des opérations d'Adams. Si x est de rang 1, c'est-à-dire $\lambda_t(x) = 1 + xt$, on vérifie par induction sur k à l'aide de la formule (*) que $\psi^k(x) = x^k$.

Si H est une A -algèbre de Hopf qui est de plus un A -module plat, nous allons définir des opérations λ^k sur $R_A(H)$. Soient $E \in \mathcal{P}_A(H)$ et $k \geq 1$ entier. On considère la k -ième puissance tensorielle $E^k = E \otimes_A \dots \otimes_A E$ (k facteurs) munie de la structure de H -comodule

$$E \otimes \dots \otimes E \xrightarrow{d_E \otimes \dots \otimes d_E} H \otimes \dots \otimes H \otimes E \otimes \dots \otimes E \xrightarrow{m \otimes id} H \otimes E \otimes \dots \otimes E$$

où m est la multiplication de k facteurs dans l'algèbre de Hopf H (si $H = A(GL_n)$, m est induite par la diagonale $\Delta : GL_n \rightarrow GL_n \times \dots \times GL_n$). Le sous-module de E^k engendré par les $x_1 \otimes \dots \otimes x_k$ où $x_i = x_j$ pour un $i \neq j$, est muni d'une structure de H -sous-comodule de E^k : si $d_E(x) = \sum c_l \otimes x_l$, $m[(d_E \otimes d_E)(x \otimes x)] = m[(\sum c_l \otimes x_l) \otimes (\sum c_l \otimes x_l)] = \sum c_i^2 \otimes x_i \otimes x_i + \sum_{r < s} c_r c_s \otimes (x_r \otimes x_s + x_s \otimes x_r)$. Par passage au quotient, on obtient un H -comodule $\lambda^k E$ (k -ième puissance extérieure).

On convient que $\lambda^0 E = A$ (H -comodule trivial défini par $d_A(1) = 1 \otimes 1$). On vérifie que $\lambda^k E \in \mathcal{P}_A(H)$ au moyen de la formule classique sur les A -modules

$$\lambda^k(E \oplus F) \simeq \bigoplus_{i=0}^k \lambda^i E \otimes \lambda^{k-i} F$$

car il est clair que les puissances extérieures de modules libres sont des modules libres.

Si $1 + R_A(H)[[t]]^+$ désigne le groupe multiplicatif des séries formelles sur $R_A(H)$ de terme constant 1, il s'avère que la formule

$$\lambda_t\{E\} = \sum_{i=0}^{\infty} [\lambda^i E] t^i$$

sur les générateurs de $R_A(H)$ induit un homomorphisme de groupes

$$\lambda_t : R_A(H) \rightarrow 1 + R_A(H)[[t]]^+$$

et par suite une structure de pré- λ -anneau sur $R_A(H)$. Le point essentiel de la démonstration est le

LEMME 3.2. Si $0 \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow V' \rightarrow 0$ est exacte dans $\mathcal{P}_A(H)$, alors

$$[\lambda^k W] = \sum_{i=0}^k [\lambda^i V] \cdot [\lambda^{k-i} V'] \quad \text{dans } R_A(H)$$

c'est-à-dire $\lambda_t : R_A(H) \rightarrow 1 + R_A(H) [[t]]^+$ est bien définie.

Preuve. Soit $f : W^m \rightarrow \lambda^m W$ la projection canonique. En tensorisant la suite $0 \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow V' \rightarrow 0$ suffisamment de fois par V et W , on obtient une filtration

$$0 \subset V^m \subset V^{m-1} \otimes W \subset \dots \subset V^i \otimes W^{m-i} \subset \dots \subset W^m.$$

L'image par f de cette filtration $f(V^i \otimes W^{m-i}) = W_i$ est une filtration du H -comodule $\lambda^m W$ (W_i coïncide avec le sous-module engendré par les $x_1 \wedge \dots \wedge x_m$ ayant au moins i facteurs dans V). On va montrer d'une part que

$$W_i/W_{i+1} \simeq \lambda^i V \otimes \lambda^{m-i} V' \quad (\text{en tant que } H\text{-comodules})$$

et d'autre part que les W_i sont des objets de $\mathcal{P}_A(H)$. Alors, par définition du produit dans $R_A(H)$, on a

$$[\lambda^i V] \cdot [\lambda^{m-i} V'] = [\lambda^i V \otimes \lambda^{m-i} V']$$

et d'autre part, on aura (en posant $W_{m+1} = 0$)

$$[\lambda^m W] = \sum_{i=0}^m [W_i/W_{i+1}].$$

Le lemme suit alors directement de ces considérations. Pour montrer l'isomorphisme $W_i/W_{i+1} \simeq \lambda^i V \otimes \lambda^{m-i} V'$, on considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V^i \otimes W^{m-i} & \xrightarrow{f} & W_i \\ \downarrow p_i & & \downarrow \\ V^i \otimes V'^{m-i} & \xrightarrow{f'} & W_i/W_{i+1} \\ & \searrow & \nearrow f'' \\ & \lambda^i V \otimes \lambda^{m-i} V' & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{où } p_i \text{ est induit} \\ \text{par la projection} \\ p : W \longrightarrow V'. \end{array}$$

Il est clair que f induit les homomorphismes de H -comodules f' et f'' . Pour vérifier que f'' est un isomorphisme, il suffit de vérifier que f'' est un isomorphisme de A -modules. Mais, en tant que A -modules, $W \simeq V$

$\oplus V'$, donc $\lambda^m W \simeq \oplus_{i=0}^m \lambda^i V \otimes \lambda^{m-i} V'$, et via cet isomorphisme, W_i/W_{i+1} s'identifie à $\lambda^i V \otimes \lambda^{m-i} V'$.

Enfin, les suites exactes

$$0 \rightarrow W_{i+1} \rightarrow W_i \rightarrow W_i/W_{i+1} \rightarrow 0$$

montrent par induction que les W_i sont A -projectifs de type fini pour $i = 0, 1, \dots, m+1$. $\square$

On déduit immédiatement du lemme 3.2 que les opérations λ^k définissent une structure de pré- λ -anneau sur $R_A(H)$ (donc en particulier sur $R_A(GL_n)$, $R_A(M_n)$, $R_A(T_n)$, $R_A(M_n \times M_n)$ etc.).

Remarques. (1) En suivant exactement la même démarche, on munit les anneaux $R_A(G)$ d'une structure de pré- λ -anneau (λ^k est la k -ième puissance extérieure munie de l'action diagonale de G), naturelle vis-à-vis des homomorphismes de restriction et d'extension des scalaires, et compatibles avec les homomorphismes canoniques définis sous 2.2

$$e_{A'} : R_A(GL_n) \rightarrow R_{A'}(GL_n(A'))$$

(2) Le *dual* $V^* = \text{Hom}_A(V, A)$, muni de l'action de G définie par

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$$

induit une involution de pré- λ -anneau sur $R_A(G)$. On en déduit des *opérations d'Adams d'indice négatif*

$$\psi^{-k}(x) = \psi^k(x^*) = (\psi^k(x))^*, \quad k > 0.$$

Ces opérations vérifient aussi la condition $\psi^{-k}[P] = [P]^{-k}$, $k > 0$ sur les éléments de rang 1 (pour autant que la notation $[P]^{-1}$ ait un sens, c'est-à-dire $[P]$ inversible), ce qui justifie leur appellation.

On dit qu'un H -comodule $E \neq 0$ est *simple* s'il ne possède pas de sous-comodule propre; E est dit *semi-simple* s'il est somme directe de sous-comodules simples.

LEMME 3.3. Si F est un corps, le groupe de Grothendieck $R_F(H)$ s'identifie au groupe abélien libre sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de H -comodules simples.

Preuve. Comme les espaces vectoriels de dimension finie sont de longueur finie, tout objet de $\mathcal{P}_F(H)$ est a fortiori de longueur finie. Maintenant, comme la catégorie $\mathcal{P}_F(H)$ est abélienne, le théorème de Jordan-Hölder [5] s'applique et le lemme en résulte.

COROLLAIRE 3.4. Si k est un corps de caractéristique nulle, ou bien un corps fini, et K/k une extension de corps, alors l'extension des scalaires $i : R_k(GL_n) \rightarrow R_K(GL_n)$ est injective.

Preuve. Soient E, E' deux $k(GL_n)$ -comodules simples non isomorphes. Au moyen de l'isomorphisme classique :

$$K \otimes_k \text{Hom}_k(E, E') \simeq \text{Hom}_K(K \otimes_k E, K \otimes_k E')$$

On montre que

$$K \otimes \text{Hom}^{k(GL_n)}(E, E') \simeq \text{Hom}^{K(GL_n)}(K \otimes_k E, K \otimes_k E')$$

donc le second membre est nul. D'autre part le comodule $K \otimes_k E$ est semi-simple, car son anneau d'endomorphismes est $K \otimes_k D_E$, où D_E est le corps $\text{End}^{K(GL_n)}(E)$, donc semi-simple ([4], l'un des deux corps est séparable sur k en vertu des hypothèses). Alors, la formule $\text{Hom}^{K(GL_n)}(K \otimes_k E, K \otimes_k E') = 0$ montre que $K \otimes_k E$ et $K \otimes_k E'$ sont sans facteur simple commun. $\square$

LEMME 3.5. Si K est un corps infini, l'homomorphisme canonique défini sous 2.2 : $e_K : R_K(GL_n) \rightarrow R_K(GL_n(K))$ (envoyant le $K(GL_n)$ -comodule E sur le $K[GL_n(K)]$ -module associé E) est injectif.

Preuve. En vertu du lemme 3.3, il s'agit de montrer que deux comodules simples non isomorphes ont pour image deux modules simples non isomorphes. Comme $GL_n(K)$ est un ouvert dense de $M_n(K)$ ($n \times n$ -matrices) pour la topologie de Zariski, le lemme suit du résultat classique : « Si la fonction polynomiale associée à un polynôme $P(X_1, \dots, X_n)$ est identiquement nulle sur un anneau intègre infini, alors le polynôme P est nul. » $\square$

Remarques. (1) Pour un corps algébriquement clos, on peut parler du groupe algébrique $GL_n(K)$ et de l'anneau $R_K^{alg}(GL_n(K))$ des représentations algébriques de $GL_n(K)$. Ce dernier coïncide avec $R_K(GL_n)$.

(2) En exploitant ce point de vue, J.-P. Serre [9] montre en particulier que les homomorphismes d'extension des scalaires :

$i : R_Z(GL_n) \xrightarrow{\sim} R_Q(GL_n)$ et $i' : R_Z(GL_n \times GL_m) \xrightarrow{\sim} R_Q(GL_n \times GL_m)$ sont des isomorphismes (il établit en premier lieu une suite exacte

$$\bigoplus_p R_{F_p}(H) \xrightarrow{i} R_Z(H) \xrightarrow{j} R_Q(H) \rightarrow 0$$

[9, théorème 1] pour toute algèbre de Hopf H , puis il montre la surjectivité des homomorphismes de décomposition

$$d_p : R_Q(GL_n) \rightarrow R_{F_p}(GL_n) \text{ et } d'_p : R_Q(GL_n \times GL_m) \rightarrow R_{F_p}(GL_n \times GL_m).$$

Par construction $j_p \circ d_p = 0$; il s'ensuit que i et i' sont des isomorphismes [9, théorèmes 3 et 5]).

LEMME 3.6. *Soit p un nombre premier. L'homomorphisme canonique*

$$e_p : R_{F_p}(GL_n) \rightarrow \prod_{m \geq 1} R_{F_{p^m}}(GL_n(\mathbb{F}_{p^m}))$$

est injectif.

Preuve. Suit du résultat classique « Si la fonction polynomiale associée à un polynôme $P(X_1, \dots, X_n)$ de degré q est identiquement nulle sur un corps contenant au moins $q + 1$ éléments, alors P est identiquement nul ». $\square$

Si A est un anneau de caractéristique $p > 0$, on désignera par Frob l'homomorphisme de Frobenius de A défini par $x \mapsto x^p$.

COROLLAIRE 3.7. *Si A est un anneau de caractéristique $p > 0$, alors*

$$\psi^p = \text{Frob}_* : R'_A(G) \rightarrow R'_A(G).$$

($R'_A(G)$ désigne le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathcal{L}_A^G$ des AG -modules A -libres de type fini.)

Preuve. Comme tout objet V de $\mathcal{L}_A^G$ est de la forme $V = \rho^*(A_{id}^n)$, il suffit par naturalité de montrer:

$$\psi^p[A_{id}^n] = \text{Frob}_*[A_{id}^n] \in R_A(GL_n(A)).$$

Comme $[A_{id}^n]$ est dans l'image de l'homomorphisme canonique $e_A : R_A(GL_n) \rightarrow R_A(GL_n(A))$ de pré- λ -anneaux, il suffit de montrer

$$\psi^p = \text{Frob}_* : R_A(GL_n) \rightarrow R_A(GL_n).$$

Par le lemme 3.6, on se réduit encore à montrer

$$\psi^p = \text{Frob}_* : R_{F_{p^m}}(GL_n(\mathbb{F}_{p^m})) \rightarrow R_{F_{p^m}}(GL_n(\mathbb{F}_{p^m})).$$

Cette dernière égalité s'obtient facilement à partir de [7]. $\square$