2. Lemmes de Hensel

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

2. Lemmes de Hensel

Dans ce paragraphe il est essentiel de supposer que K *est complet pour sa valuation.*

2.1. Dans le cas commutatif il existe deux types de lemmes de Hensel. Une propriété de factorisation d'un polynôme relativement aux valeurs exceptionnelles qui lui sont associées (pentes du polygone de Newton). Pour les polynômes différentiels on aura exactement la même propriété pour les valeurs exceptionnelles $< \alpha$ (pentes $> -\alpha$) (corollaire 2.6). Toute la partie correspondant à $t \geqslant \alpha$ sera regroupée en un seul facteur fuchsien (α-dominant) (théorème 2.4).

Par ailleurs pour un polynôme à coefficients dans l'anneau de valuation de K, si par passage au quotient on a une factorisation dans le corps résiduel en facteurs premiers entre eux, cette factorisation se relève. Dans le cas des opérateurs différentiels pour pouvoir passer au quotient il faut d'abord supposer que la dérivation envoie l'anneau de valuation de K dans lui-même, c'est-à-dire que $\alpha \geqslant 0$. Si $\alpha > 0$, la dérivation est triviale sur le corps résiduel, donc par passage au quotient les polynômes différentiels commutent; alors une factorisation en facteurs premiers entre eux se relève (théorème 2.5). Dans le cas $\alpha = 0$ on ne peut pas obtenir de résultat général. Chaque cas d'espèce demande un traitement particulier. Le cas particulier $K = k\left((x)\right)$ et $\partial = x \dfrac{d}{dx}$ sera traité plus loin (Théorème 2.13).

2.2. Lemme. *Soient* $A, P, Q, P', Q' \in D_K$ *tels que*

(1) $A = QP = P'Q'$

(2) $\deg P = \deg P'$ ($\deg Q = \deg Q'$)

(3) *pour tous* $\bar{P}, \bar{Q} \in D$, $\deg \bar{P} < \deg P$ *et* $\bar{P}Q' = \bar{Q}P$ *entraînent* $\bar{P} = \bar{Q} = 0$.

Alors on a $D/DP \simeq D/DP'$, $D/DQ \simeq D/DQ'$, $D/DA \simeq D/DP \oplus D/DQ$. *(Les isomorphismes étant des isomorphismes de* D*-modules à gauche).*

Pour la notion de D-module on renvoie à [Mn].

Démonstration (MALGRANGE). On considère la suite exacte de D-modules à gauche

$$0 \to D/DQ \xrightarrow{\lambda} D/DA \xrightarrow{\mu} D/DP \to 0$$

où la première flèche (resp. la seconde) est définie par passage au quotient à partir de la multiplication à droite par P (resp. à partir de l'identité). De même on a la suite exacte

$$0 \to D/DP' \xrightarrow{\lambda'} D/DA \xrightarrow{\mu'} D/DQ' \to 0\,.$$

Nous allons montrer que le morphisme $\mu\lambda'$ est un isomorphisme de D/DP' sur D/DP. Comme ces deux modules sont finis et de même rang sur K, il suffit de montrer que $\mu\lambda'$ est injectif. Or, soit $\sigma \in D/DP'$ tel qu'on ait $\mu\lambda'(\sigma) = 0$. En relevant σ en $S \in D$ cela signifie qu'on a $SQ' \in DP$. L'ensemble des S vérifiant cette dernière condition est un idéal à gauche de D contenant P', et il suffit de montrer que P' engendre cet idéal. Si c'était faux, le générateur $\bar{P}$ de cet idéal serait de degré $< \deg P'$ et l'on aurait la relation $\bar{P}Q' = \bar{Q}P$, ce qui est incompatible avec (3).

(On montre de même que $\mu'\lambda$ est un isomorphisme de D/DQ sur D/DQ').

Mais alors l'application $\lambda'(\mu\lambda')^{-1}$ est un relèvement de μ ce qui démontre la dernière assertion.

2.3. *Remarque.*

On a observé dans la démonstration précédente que si l'on avait une factorisation $A = QP$, on identifiait de façon canonique D/DQ à un sous-module de D/DA. Réciproquement soit N un sous-D-module du D-module $M = D/DA$. Soit m l'image dans M du polynôme constant 1 de D, c'est un vecteur cyclique de M et l'on a $Am = 0$. Soit u l'image de m dans le D-module quotient M/N; u est un vecteur cyclique de M/N. Si $P \in D$ est le polynôme différentiel unitaire minimal que annihile u, alors P divise A et $M/N \simeq D/DP$. Soit $A = QP$, D/DQ s'identifie avec le noyau de l'application quotient $M = M/N$, donc $D/DQ \simeq N$. On voit donc qu'il est équivalent d'étudier la factorisation de l'opérateur A et de rechercher les sous-modules du D-module D/DA.

2.4. THÉORÈME. *Soit* $A \in D_K$. *Soit* $t \leqslant \alpha$.

1) *Il existe* $Q, P \in D_K$ *avec* P *t-dominant,* $\deg P = N(A, t)$, *tels que* $A = QP$.

2) *(Unicité). Si l'on a une autre décomposition* $A = Q_1 P_1$ *vérifiant les mêmes conditions, il existe* $a \neq 0$ *de* K *tel que* $Q_1 = Qa^{-1}$ *et* $P_1 = aP$.

3) *Il existe* $Q', P' \in D_K$ *avec* P' *t-dominant*, $\deg P' = N(A, t)$, *tels que* $A = P' Q'$.

4) *On a* $D/DP \simeq D/DP'$, $D/DQ \simeq D/DQ'$, $D/DA \simeq D/DP \oplus D/DQ$.

Démonstration :

1) Soit $A = \Sigma\, a_i\, \partial^i$. Posons $N = N(A, t)$. Posons $P_0 = \sum_{i \leqq N} a_i\, \partial^i$.

On définit $P_n\, Q_n$, R_n de D_K par les formules de récurrence

$$A = Q_n P_n + R_n \qquad \deg R_n < \deg P_n$$
$$P_{n+1} = P_n + R_n\, .$$

Soit $\lambda = v(A - P_0, t) - v(A, t)$. Il résulte de la définition de $N = N(A, t)$ que $\lambda > 0$.

Nous allons montrer par induction sur n que l'on a

$(\mathrm{i})_n$ P_n est t-dominant et $v(P_n, t) = v(A, t)$.

$(\mathrm{ii})_n$ $v(1 - Q_n, t) \geqslant \lambda$

$(\mathrm{iii})_n$ $v(R_n, t) \geqslant v(A, t) + (n+1)\lambda$

$(\mathrm{iv})_n$ $v(Q_{n+1} - Q_n, t) \geqslant (n+2)\lambda$.

Remarquons que P_0 est de degré N et que le coefficient de ∂^N dans P_0 est a_N; d'où

$$v(P_o, t) = \inf_{i \leqq N} \big(v(a_i) + it\big) = a_N + Nt = \inf_i \big(v(a_i) + it\big) = v(A, t)$$

ce qui montre $(i)_0$.

Comme P_0 est t-dominant et que l'on a

$$A - P_o = (1 - Q_o) P + R_o \qquad \deg R_o < \deg P_o\, ,$$

il résulte de la proposition 1.12 et de la définition de λ que l'on a

$$v(1 - Q_o, t) \geqslant v(A - P_o, t) - v(P_o, t) \geqslant \lambda$$

et
$$v(R_o, t) \geqslant v(A - P_o, t) \geqslant v(A, t) + \lambda$$

ce qui montre $(\mathrm{ii})_0$ et $(\mathrm{iii})_0$.

Comme l'on a

$$A = Q_n P_n + R_n = Q_{n+1} P_{n+1} + R_{n+1} = Q_{n+1}(P_n + R_n) + R_{n+1}$$

d'où

$$(1 - Q_n) R_n = (Q_{n+1} - Q_n) P_n + R_{n+1} \qquad \deg R_{n+1} < \deg P_n$$

il résulte de $(\mathrm{i})_n$ $(\mathrm{ii})_n$ $(\mathrm{iii})_n$ et de la proposition 1.13 que

$$v(Q_{n+1} - Q_n, t) \geqslant v(1 - Q_n, t) + v(R_n, t) - v(P_n, t) \geqslant (n+2)\lambda,$$

et

$$v(R_{n+1}, t) \geqslant v(1 - Q_n, t) + v(R_n, t) \geqslant (n+2)\lambda$$

ce qui montre $(\mathrm{iv})_n$ et $(\mathrm{iii})_{n+1}$.

D'après $(\mathrm{iii})_n$ $v(R_n, t) > v(A, t) = v(P_n, t)$, donc

$$v(P_{n+1}, t) = v(P_n, t) = v(A, t).$$

Par ailleurs il est clair que P_{n+1} est de degré N et que le coefficient de ∂^N dans P_{n+1} est a_N. Il en résulte. comme pour P_0, que P_{n+1} est t-dominant, ce qui montre $(\mathrm{i})_{n+1}$.

Enfin d'après $(\mathrm{ii})_n$ et $(\mathrm{iv})_n$

$$v(1 - Q_{n+1}, t) \geqslant \inf\big(v(1 - Q_n, t), v(Q_n - Q_{n+1}, t)\big) \geqslant \lambda$$

ce qui montre $(\mathrm{ii})_{n+1}$.

Ceci achève la démonstration des formules $(\mathrm{i})_n \dots (\mathrm{iv})_n$.

On a pour tout n $\deg P_n = N$, $\deg R_n \leqslant \deg A$, $\deg Q_n \leqslant \deg A - N$. Les relations $(\mathrm{iii})_n$ et $(\mathrm{iv})_n$ montrent que les coefficients de R_n tendent vers 0 et que les coefficients de P_n et Q_n forment des suites de Cauchy. Comme K est complet ces suites convergent. Soient $P = \lim P_n$ et $Q = \lim Q_n$. On a $A = \lim (Q_n P_n + R_n) = QP$.

Enfin il est clair que le coefficient de ∂^N dans P est a_N. Ceci joint au fait que $v(P, t) = \lim v(P_n, t) = v(A, t)$ montre que P est t-extrémal et que $\deg P = N = N(A, t)$.

2) Effectuons la division euclidienne de P_1 par P. Comme $\deg P_1 = \deg P\,(= N(A, t))$ on a

$$P_1 = aP + R \qquad \deg R < \deg P, \qquad a \in K.$$

Comme P est t-extrémal ceci entraîne

$$N(R, t) \leqslant \deg R < \deg P = N(P, t).$$

De la relation $A = QP = Q_1 P_1$ on tire

$$Q_1 R = (Q_1 - Qa) P .$$

Comme $t \geqslant \alpha$ on a en premier lieu

$$N(Q_1, t) = N(A, t) - N(P_1, t) = 0$$

et par conséquent

$$N(Q_1 R, t) = N(Q_1, t) + N(R, t) = N(R, t) = N(Q_1 - Qa, t) + N(P, t).$$

Cette relation jointe à l'inégalité $N(R, v) < N(P, t)$ entraîne

$$N(R, t) = N(Q_1 - Qa, t) = -\infty$$

c'est-à-dire $R = Q_1 - Qa = 0$ ce qui démontre 2) .

3) Cela se fait comme en 1) en changeant l'ordre des produits.

4) Supposons qu'on ait $\bar{P}Q' = \bar{Q}P$ avec $\deg \bar{P} < \deg P$.

On a comme précédemment $N(Q', t) = 0$ et

$$N(\bar{P}, t) \leqslant \deg \bar{P} < \deg P = N(P, t)$$

ce qui, joint à

$$N(\bar{P}, t) + N(Q', t) = N(\bar{Q}, t) + N(P, t)$$

entraîne $\bar{P} = \bar{Q} = 0$. On applique alors le lemme 2.2.

2.5. *Exemples.*

2.5.1. Soit $K = k((x))$ muni de la dérivation $\partial = \frac{d}{dx}$ (cf. § 1.14). En appliquant le théorème précédent avec $t = \alpha = -1$, on obtient une décomposition de l'opérateur différentiel A en un facteur fuchsien P et un facteur Q totalement irrégulier, c'est-à-dire qui ne possède pas de facteur fuchsien de degré non nul.

2.5.2. Soit L un corps valué ultramétrique. L'application $P \mapsto v(P, 0)$ définie sur $L[X]$ s'étend à $L(X)$ et définit une valuation sur $L(X)$ appelée valuation de Gauss. Le complété de $L(X)$ pour cette valuation sera noté E (cf. [Dw] pour plus de détails). La dérivation $\partial = \frac{d}{dx}$ définie sur $L(X)$

est continue et s'étend à E. On a $\alpha(\partial) = 0$. Le théorème précédent s'applique donc pour $t \leqslant 0$. (Le cas $t = 0$ a été considéré dans [Ro]).

2.5.3. Remarquons que les résultats du § 1 sont encore valables si les coefficients des opérateurs différentiels sont pris non pas dans un corps mais dans un anneau valué. Dans la proposition 1.13 pour pouvoir effectuer la division euclidienne il faut bien sûr supposer que le coefficient du terme de plus haut degré de P est inversible dans l'anneau considéré.

En particulier la démonstration du théorème 2.4 reste valide si l'on suppose que le coefficient a_N de l'opérateur A est inversible.

Cette remarque nous sert dans la situation suivante:

Soit L un corps valué ultramétrique complet algébriquement clos. Soit S un sous-ensemble de L. Si f, définie sur S, est la limite uniforme sur S de fractions rationnelles sans pôles dans S on dit que f est un élément analytique sur S. Supposons que S soit une union de classes résiduelles de L; alors en utilisant les propriétés du paragraphe 1.3 on montre facilement que pour une fraction rationnelle f sans pôles dans S, $\inf_{x \in S} v(f(x)) = v(f, 0)$. Il en résulte que l'anneau $H(S)$ des éléments analytiques sur S s'identifie à un sous-anneau fermé de E, défini en 2.5.2. On dit que $f \in E$ est un élément analytique admissible (cf. [Dw]) s'il existe un sous-ensemble S formé de toutes les classes résiduelles sauf un nombre fini (on dira que S est standard) tel que f soit un élément analytique sur S. L'ensemble des éléments analytiques admissibles forme un sous-corps H de E qui n'est pas complet pour la valuation. Mais pour chaque $a \in H$, il existe un ensemble standard S tel que $a \in H(S)$ et que a ne s'annule pas dans S (cette dernière condition peut être réalisée car un élément analytique sur un ensemble standard n'a qu'un nombre fini de zéros). Alors l'anneau $H(S)$ est complet et a est inversible dans $H(S)$. Pour la dérivation $\partial = \dfrac{d}{dx}$ de H, $H(S)$ est stable. Le théorème 2.4 est donc encore valable pour les opérateurs à coefficients dans H bien que H ne soit pas complet.

2.6. Corollaire. *Soit* $A \in D_K$ *et soit* $t < \alpha$.

1) *Il existe* $Q, P \in D_K$, *avec* P *t-extrémal et* $\deg P = N(A, t) - n(A, t)$, *tels que* $A = QP$.

2) *On a également une factorisation* $A = P'Q'$ *où* P' *vérifie les mêmes conditions que* P.

3) *On a* $D/DP \simeq D/DP'$, $D/DQ \simeq D/DQ'$, $D/DA \simeq D/DP \oplus D/DQ$.

Démonstration. D'après le théorème 2.4 il existe $L, B \in D_K$, avec B t-dominant et $N(B, t) = N(A, t)$ tels que $A = LB$.

Alors $N(L, t) = 0$, donc $N(L, s) = 0$ pour $s \geqslant t$ et $n(L, s) = 0$ pour $s \geqslant t$. Par conséquent pour $s \geqslant t$ on a

$$N(B, s) = N(A, s) \quad \text{et} \quad n(B, s) = n(A, s).$$

Pour s assez voisin de t, $s > t$, on a $n(B, t) = N(B, s)$. Pour un tel s il existe $M, P \in D_K$, M s-dominant, tels que $B = MP$ et $N(M, s) = N(B, s)$.

On pose $Q = LM$. On a donc $A = QP$. Par ailleurs $\deg B = N(A, t)$, $\deg M = N(B, s) = n(B, t) = n(A, t)$, et donc $\deg P = N(A, t) - n(A, t)$.

Comme $t < s$, $N(M, t) = n(M, t) = \deg M$, d'où

$$N(P, t) = N(B, t) - N(M, t) = N(A, t) - n(A, t)$$
$$n(P, t) = n(B, t) - n(M, t) = 0$$

ce qui montre que P est t-extrémal.

2) Se démontre de même et 3) se démontre comme le 4) du théorème 2.4.

2.7. Notons $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation de K. Supposons que $\alpha(\partial) > 0$. Alors la dérivation envoie $\mathcal{O}$ dans son idéal maximal et par passage au quotient induit la dérivation triviale sur le corps de restes k de K.

Nous noterons $\mathcal{O}[\partial]$ l'anneau des éléments de D_K dont les coefficients sont dans $\mathcal{O}$. Soit $A = \Sigma a_i \partial^i \in \mathcal{O}[\partial]$ et $\bar{A} = \Sigma \bar{a}_i \partial^i \in k[\partial]$ son image. Supposons qu'on ait une factorisation $\bar{A} = Q^* P^*$ dans $k[\partial]$, nous cherchons si cette factorisation se relève dans $\mathcal{O}[\partial]$. La démonstration classique de ce lemme de Hensel dans le cas commutatif (cf. par exemple [Am] 2.5) ne se généralise pas au cas des opérateurs différentiels. Nous allons donc suivre la méthode de [Dw] § 6 qui interprète l'équation $A = QP$ en un système d'équations différentielles non linéaires portant sur les coefficients de Q et P. Nous allons donc commencer par étudier à quelles conditions un système d'équations différentielles non linéaires ayant une solution dans le corps résiduel a une solution dans $\mathcal{O}$.

Soit un système différentiel non linéaire de m équations à m inconnues à coefficients dans $\mathcal{O}$. Précisément posant

$$X = (X_1, \ldots, X_m),\ Y_i = (Y_{i,1}, \ldots, Y_{i,m})\ 1 \leqslant i \leqslant s$$

et $X^\mu = X_1^{\mu_1} \ldots X_m^{\mu_m}$ pour $\mu \in \mathbf{N}^m$, soit

$$F(X, Y_1, \ldots, Y_s) = \sum_{\mu, (v_i)} C_{\mu, (v_i)} X^\mu Y_1^{v_1} \ldots Y_s^{v_s} \tag{2.7.1}$$

avec μ, $v_i \in \mathbf{N}^m$, la somme étant finie, et avec $C_{\mu, (v_i)} \in \mathcal{O}^m$.

Nous cherchons une solution dans $\mathcal{O}^m$ de l'équation

$$G(X) =_{\text{déf}} F\big(X, \partial(X), \ldots, \partial^s(X)\big) = 0 . \tag{2.7.2}$$

Pour $u \in \mathcal{O}$ nous appelons application tangente à G en u, l'application L_u de $\mathcal{O}^m$ dans lui-même définie par

$$L_u(z) = L_u(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{i=1}^{m} z_i \frac{\partial F}{\partial X_i}(u, \partial(u), \ldots) \tag{2.7.3}$$

$$+ \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{m} \partial^j z_i \frac{\partial F}{\partial Y_{j,i}}(u, \partial(u), \ldots) .$$

Nous écrirons

$$L_u(z) = A_u(z) + B_u\big(\partial(z)\big)$$

où $A_u(z) = \sum_{i=1}^{m} z_i \dfrac{\partial F}{\partial X_i}(u, \ldots)$. Nous utiliserons la même notation A_u pour désigner l'application de $\mathcal{O}^m$ dans lui-même et la matrice qui lui est associée.

Par passage au quotient l'équation (2.7.2) devient

$$\bar{G}(X) = \sum_{\mu} \bar{C}_{\mu, (0)} X^\mu = 0 \tag{2.7.4}$$

dont l'application tangente en $u^* \in k^m$ est $\bar{A}_{u^*}$ définie par

$$\bar{A}_{u^*}(z) = \sum_{i=1}^{m} z_i \frac{\partial \bar{G}}{\partial X_i}(u^*) . \tag{2.7.5}$$

2.8. Proposition. *Soit* $\alpha > 0$. *Soient* F *et* G *définies par les formules* (2.7.1) *et* (2.7.2). *Soit* $u^* \in k^m$ *une solution de l'équation réduite* $\bar{G}(u^*) = 0$. *Supposons que l'application tangente réduite* $\bar{A}_{u^*}$ *est inversible dans* k^m. *Alors* u^* *se relève de facon unique en une solution* $u \in \mathcal{O}^m$ *de l'équation* $G(u) = 0$.

Démonstration. Soit η un relèvement de u^* dns $\mathcal{O}^m$. Considérons le développement taylorien de G autour de η

$$G(\eta + X) = G(\eta) + A_\eta(X) + B_\eta\big(\partial(X)\big) + Q_\eta(X) . \tag{2.8.1}$$

On a $\bar{A}_\eta = A_{u^*}$. D'après notre hypothèse $\det(\bar{A}_{u^*}) \neq 0$, ceci signifie que $\det(A_\eta)$ est une unité de $\mathcal{O}$ donc que A_η est inversible dans $GL_m(\mathcal{O})$.

Posons $u = \eta + w$. Alors l'équation $G(u) = 0$ équivaut à

$$(2.8.2) \qquad w = -A_\eta^{-1}\left(G(\eta) + B_\eta(\partial(w)) + Q_\eta(w)\right) =_{\text{déf}} \Phi(w).$$

On munit K^m de la norme (exprimée sous forme additive) définie pour $X = (x_1, \ldots, x_m) \in K^m$ par $v(X) = \inf_i v(x_i)$.

Notons que, comme Q_n ne contient que des termes au moins quadratiques en la variable et ses dérivées on a pour tous $z, y \in \mathcal{O}^m$

$$v(Q_\eta(z)) \geqslant 2v(z)$$
$$v(Q_\eta(z) - Q_\eta(y)) \geqslant v(z-y) + \inf(v(y), v(z)).$$

Comme $\overline{G(\eta)} = \bar{G}(u^*) = 0$, on a $v(G(\eta)) > 0$. Choisissons λ réel tel que

$$0 < \lambda < \inf(\alpha, v(G(\eta))).$$

Soit $U = \{z \in \mathcal{O}^m ; v(z) \geqslant \lambda\}$. Nous allons montrer que Φ est une contraction de U. Puisque U est complet il en résultera par le théorème du point fixe que l'équation (2.7.2) possède une solution dans U et donc que l'équation (2.7.2) possède une solution u qui est un relèvement de u^*.

i) Φ envoie U dans lui-même. En effet on a pour $v(z) \geqslant \lambda$

$$v(\Phi(z)) \geqslant \inf(v(G(\eta)), v(B_\eta(\partial z)), v(Q_\eta(z)) \geqslant \inf(v(G(\eta)), v(z) + \alpha, 2v(z)) \geqslant \lambda.$$

ii) Φ est une contraction.

$$v(\Phi(z) - \Phi(y)) \geqslant \inf(v(z-y) + \alpha, v(z-\eta) + \inf(v(z), v(y)))$$
$$\geqslant v(z-y) + \lambda.$$

Montrons l'unicité du relèvement. Soit u_1 un deuxième relèvement de u* solution de l'équation (2.7.2). On a $v(u_1 - \eta) > 0$. Il est toujours possible de choisir λ de sorte que $0 < \lambda < v(u_1 - \eta)$. Alors $u_1 - \eta \in U$ et vérifie (2.8.2). En vertu de l'unicité du point fixe d'une contraction on a $u_1 - \eta = u - \eta$ d'où $u_1 = u$.

2.9. THÉORÈME. *Soit* $\alpha > 0$. *Soit* $A \in \mathcal{O}[X]$ *de degré* $m + n$. *Supposons que son image* $\bar{A}$ *dans* $k[X]$ *se factorise sous la forme*

$$\bar{A} = Q^* P^* \tag{2.9.1}$$

où P^* *est unitaire de degré* n, Q^* *et* P^* *étant premiers entre eux.*

1) *Il existe un relèvement unique* Q, P *de* Q^*, P^* *avec* $\deg Q = m$, $\deg P = n$, P *unitaire, tel que*

$$A(\partial) = Q(\partial) P(\partial) . \tag{2.9.2}$$

2) *Il existe également un unique relèvement* Q', P' *vérifiant les mêmes hypothèses que* Q *et* P *tel que*

$$A(\partial) = P'(\partial) Q'(\partial) . \tag{2.9.3}$$

3) *On a* $D/DP \simeq D/DP'$, $D/DQ \simeq D/DQ'$, $D/DA \simeq D/DP \oplus D/DQ$.

Démonstration. L'équation (2.9.2) peut s'interpréter comme un système de $m + n$ équations différentielles portant sur les coefficients (d'ordre $\leqslant m - 1$ et d'ordre $\leqslant n - 1$ respectivement) de Q et de P, et (2.9.1) représente alors le système réduit. Si $\mathscr{P}_m$ désigne l'espace des polynômes à coefficients dans k de degré $\leqslant m$, l'application tangente réduite $\bar{A}_{Q^*, P^*}$ s'interprète comme l'application de $\mathscr{P}_{m-1} \times \mathscr{P}_{n-1}$ dans $\mathscr{P}_{m+n-1}$

$$(U, V) \mapsto UP^* + Q^* V,$$

et cette application est inversible si et seulement si P^* et Q^* sont premiers entre eux (théorème de Bezout, cf. [Ro] § 1.3).

2.10. Dans le cas $\alpha = 0$, la démonstration précédente n'est plus valable (car l'application $z \mapsto B_\eta(\partial z)$ n'est plus forcément une contraction). Il n'existe pas de démonstration valable pour tous les corps avec dérivation donnant un résultat du type du théorème 2.9 pour $\alpha = 0$. On donnera deux exemples de cette situation: l'un dans le cas $K = k((x))$ (cf. 2.5.1), l'autre dans le cas où K est le corps considéré à l'exemple 2.5.2.

Nous allons établir maintenant un lemme de Hensel du type précédent dans le cas $K = k((x))$ muni de la dérivation $\partial = x \dfrac{d}{dx}$ (on a alors $\alpha(\partial) = 0$). Nous allons d'abord donner une nouvelle version du théorème 2.8. Soient F, G et L_u définies par les relations (2.7.1), (2.7.2) et (2.7.3). Nous allons maintenant interpréter L_u comme une $m \times m$ matrice à coefficients dans $\mathcal{O}[\partial]$.

Pour $u^* \in k^m$ on définit $\bar{L}_{u^*}$ comme étant la $m \times m$ matrice à coefficients dans $k[\partial]$ réduite de L_{u^*}. Le i-j-coefficient de $\bar{L}_{u^*}$ est donc

$$\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial X_j}(u^*, 0, 0 \ldots) + \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial Y_{l,j}}(u^*, 0, 0 \ldots)\, \partial^l .$$

Notons que par passage au quotient, ∂ induit la dérivation triviale sur le corps résiduel k, il faut donc distinguer entre un opérateur différentiel à coefficients dans k et l'application qu'il définit dans k. Par contre les opérateurs différentiels à coefficients dans k commutent entre eux, on peut donc définir $\det(\bar{L}_{u^*}) \in k[\partial]$.

2.11. LEMME. *Soient* $\pi \in k[X]$ *et* s_0 *entier tels que* $\pi(s) \neq 0$ *pour tout* $s \geqslant s_0$. *Alors* $\pi(\partial)$ *réalise une bijection isométrique de la boule* $\{a \in k((x));\ v(a) \geqslant s_0\}$ *sur elle-même.*

Démonstration :

C'est évident puisque $\pi(\partial)\left(\sum_{s \geqq s_0} a_s x^s\right) = \sum_{s \geqq s_0} \pi(s)\, a_s x^s$.

2.12. PROPOSITION. *Soit* $K = k((x))$ *et* $\partial = x \dfrac{d}{dx}$. *Soient* F *et* G *définies par les formules* (2.7.1) *et* (2.7.2). *Soit* $\eta \in \mathcal{O}_K^m$ *et posons* $\pi(\partial)$ $\det(\bar{L}_\eta) \in k[\partial]$. *Soit* s_0 *entier* >0 *tel que pour tout entier* $s \geqslant s_0$, $\pi(s) \neq 0$. *Si l'on a* $v(G(\eta)) \geqslant s_0$, *il existe un unique* $u \in \mathcal{O}^m$ *solution de l'équation* $G(u) = 0$ *tel que* $v(u-\eta) \geqslant s_0$.

En particulier soit $u^* \in k^m$ *solution de* $\bar{G}(u^*) = 0$. *Soit* $\pi(\partial) =$ $\det(\bar{L}_{u^*}) \in k[\partial]$. *Si* π *ne possède pas de racines entières* >0, *il existe un unique relèvement* u *de* u^* *solution de l'équation* $G(u) = 0$.

Démonstration : Notre hypothèse implique en particulier que $\pi(\partial)$ n'est pas le polynôme nul. Il existe donc une $m \times m$ matrice M à coefficients dans $k[\partial]$ telle que

$$M\bar{L}_\eta = \pi(\partial)\, I$$

où I désigne la $m \times m$ matrice identité.

On a donc

$$ML_\eta - \pi(\partial)\, I = xN$$

où N est une matrice à coefficients dans $\mathcal{O}[\partial]$ (ici $\mathcal{O} = k[[x]]$ et x est l'uniformisante canonique de K).

Comme dans la proposition 2.8 on considère le développement taylorien (2.8.1) de G, et l'on voit que l'équation $G(u) = 0$ peut s'écrire, avec $w = u - \eta$,

$$(2.12.1) \qquad \pi(\partial)\, w = -\left(MG(\eta) + xN(w) + MQ_\eta(w)\right).$$

Soit $U = \{z \in \mathcal{O}^m;\ v(z-\eta) \geqslant s_0\}$. Il est clair que si $w \in U$ le second membre de (2.12.1) appartient aussi à U, et donc si l'on cherche une solution de 2.12.1 dans U, il est équivalent d'écrire (puisque d'après le lemme 2.11 $\pi(\partial)$ est inversible sur U),

$$(2.12.2) \qquad w = \Phi(w) =_{\text{déf}} -\pi(\partial)^{-1}\left(MG(\eta) + xN(w) + MQ_\eta(w)\right).$$

On vérifie facilement comme dans la proposition 2.5 que Φ est une contraction de U, ce qui montre que l'équation (2.12.1) possède une solution unique.

Pour la deuxième partie de la proposition il suffit de prendre un relèvement η quelconque de u^* (par exemple $\eta = u^*$) et de prendre $s_0 = 1$.

2.13. Théorème. *Soit* $K = k((x))$ *et* $\partial = x\dfrac{d}{dx}$. *Soit* $A \in \mathcal{O}[X]$ *de degré* $m + n$. *Supposons que son image* $\bar{A}$ *dans* $k[X]$ *se factorise sous la forme*

$$(2.13.1) \qquad \bar{A} = Q^* P^*$$

où P^* *est unitaire de degré* n.

1) *Si* $Q^*(X+s)$ *est premier à* $P^*(X)$ *pour tout entier* $s > 0$, *il existe un relèvement unique* Q', P' *de* Q^*, P^* *avec* $\deg Q = m$, $\deg P = n$, P *unitaire, tel que*

$$(2.13.2) \qquad A(\partial) = Q(\partial)\, P(\partial).$$

2) *Si* $P^*(X+s)$ *est premier à* $Q^*(X)$ *pour tout entier* $s > 0$, *il existe un relèvement unique* Q', P' *de* Q^*, P^* *avec* $\deg Q' = m$, $\deg P' = n$, P' *unitaire, tel que*

$$A(\partial) = P'(\partial)\, Q'(\partial).$$

3) *Si* $P^*(X+s)$ *est premier à* $Q^*(X)$ *pour tout* $s \in \mathbf{Z}, P, Q, P', Q'$ *étant les polynômes différentiel définis précédemment on a*

$$D/DP \simeq D/DP', \quad D/DQ \simeq D/DQ', \quad D/DA \simeq D/DP \oplus D/DQ.$$

4) *Soit* s_0 *entier* >0 *tel que pour tout entier* $s \geqslant s_0$ $Q^*(X+s)$ *soit premier à* $P^*(X)$. *S'il existe un relèvement* Q_1, P_1 *de* Q^*, P^* *avec* $\deg Q_1 = m$, $\deg P_1 = n$, P_1 *unitaire et* $v(A(\partial) - Q_1(\partial) P_1(\partial), 0) \geqslant s_0$, *alors il existe* $Q, P \in D$ *uniques avec* $\deg Q = m$, $\deg P = n$, P *unitaire*, $v(P-P_1, 0) \geqslant s_0$, $v(Q-Q_1, 0) \geqslant s_0$ *et* $A = QP$.

On a un énoncé similaire pour une factorisation $A = P'Q'$.

Les théorèmes 2.9 et 2.13 sont les équivalents du classique lemme de décompositions pour les modules différentiels dont on trouvera un énoncé précis dans [Le] § 2.

Démonstration :

1) L'équation (2.13.2) peut s'interpréter comme un système de $m + n$ équations différentielles portant sur les coefficients (d'ordre $\leqslant m - 1$ et d'ordre $\leqslant n - 1$ respectivement) de Q et P, et (2.13.1) représente le système réduit. Il s'agit de montrer que le polynôme $\pi(\partial)$, déterminant de $\bar{L}_{Q^*, P^*}$ ne s'annule pas sur les entiers >0.

Or, si l'on note $\mathscr{P}_m$ l'espace des polynômes différentiels de degré $\leqslant m$, à coefficients dans $k((x))$, l'application tangente L_{Q^*, P^*} s'interprète comme l'application de $\mathscr{P}_{m-1} \times \mathscr{P}_{n-1}$ dans $\mathscr{P}_{m+n-1}$

$$(U(\partial), V(\partial)) \mapsto U(\partial) P^*(\partial) + Q^*(\partial) V(\partial).$$

Si

$$P^* = \sum_{i=0}^{n} p_i \partial^i, \quad Q^* = \sum_{i=0}^{m} q_i \partial^i, \quad U = \sum_{i=0}^{m-1} u_i \partial^i, \quad V = \sum_{i=0}^{n-1} v_i \partial^i,$$

on a

$$UP^* + Q^*V = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n} u_i p_j \partial^{i+j} + \sum_{j=0}^{m} q_i \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} \partial^l (v_j) \partial^{i+j-l}.$$

Nous n'expliciterons pas la matrice de L_{P^*, Q^*} (qui a ses coefficients dans $k[\partial]$) mais nous observerons que si dans cette matrice nous faisons $\partial = 0$ alors on obtient la matrice de l'application

$$\begin{aligned}(U(X), V(X)) \mapsto & \; U(X) P^*(X) + Q^*(X) V(X) \\ = & \; U(X) P^*(X) + V(X) Q^*(X)\end{aligned}$$

dont on a observé dans la démonstration du théorème 2.9 qu'elle était inversible si et seulement si P^* et Q^* étaient premiers entre eux.

En résumé $\pi(0) \neq 0$ si et seulement si $P^*(X)$ *et* $Q^*(X)$ sont premiers entre eux.

De la relation

$$(\partial + s)^i v = \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} (\partial + s)^l (v)\, \partial^{i-l}$$

valable pour tout $v \in k((x))$, tout entier $i \geqslant 0$ et s entier, on voit que la matrice $L_{P^*(X),\, Q^*(X+s)}(\partial)$ de l'application

$$\big(U(\partial), V(\partial)\big) \mapsto U(\partial) P^*(\partial) + Q^*(\partial + s) V(\partial) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{n} u_i p_j \partial^{i+j} + \sum_{i=0}^{n-1} q_i \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} (\partial + s)^l (v_j)\, \partial^{i+j-l}$$

est $L_{P^*(X),\, Q^*(X)}(\partial + s)$.

Par conséquent d'après ce qu'on vient de voir, $\pi(s) \neq 0$ si et seulement si $P^*(X)$ et $Q^*(X+s)$ sont premiers entre eux.

Il suffit alors d'appliquer la proposition 2.12.

2) se démontre de même.

3) Supposons qu'on ait $P_1 Q' = Q_1 P$ avec $\deg P_1 < \deg P$. Si $P_1 \neq 0$ (et donc $Q_1 \neq 0$) on peut se ramener au cas $v(P_1, 0) = v(Q_1, 0) = 0$. En passant au corps résiduel on obtient $\bar{P}_1 Q^* = \bar{Q}_1 P^*$ avec $\deg \bar{P}_1 < \deg P^*$ et $\bar{P}_1 \neq 0$ $\bar{Q}_1 \neq 0$ ce qui contredit l'hypothèse que Q^* et P^* sont premiers entre eux.

On applique alors le lemme 2.2.

4) Se démontre comme 1).

2.14. *Applications.*

2.14.1. Soit $A \in D$ avec $v(A, 0) = 0$; on a

$$\deg \bar{A} = N(A, 0)\,.$$

Si A n'est pas fuchsien, c'est-à-dire si $\deg \bar{A} < \deg A$, en appliquant le théorème 2.12 avec $P^* = \bar{A}$ et $Q^* = 1$, on obtient une factorisation de A en un opérateur fuchsien et un opérateur totalement irrégulier (cf. 2.5.1), ce qui nous redonne une démonstration différente du résultat 2.5.1.

2.14.2. Supposons maintenant que k est algébriquement clos de caractéristique 0.

Soit $A \in D$ avec $v(A, 0) = 0$, de degré n et supposons A fuchsien. Alors $\bar{A}$ (qui est le polynôme indiciel de A) est de degré n. Notons $\lambda_1 \dots \lambda_n$ ses racines de telle sorte que si pour $i < j$ $\lambda_i - \lambda_j$ est entier, alors cet entier est positif. Appliquons le théorème 2.12 avec $P^*(X) = (X - \lambda_1)$ et $Q^* = c(X - \lambda_n) \dots (X - \lambda_2)$. On aura alors une factorisation $A = A_1 P_1$ où P_1 relève P^* et A_1 relève Q^*. Par induction sur le degré de A on voit que l'on al a factorisation $A = a P_n \dots P_1$, avec $P_i = \partial - \eta_i$, et $\eta_i - \lambda_i \in x\, k\, [[x]]$.

On peut retrouver ce résultat de façon différente. Il est bien connu (cf. [In] § 16.1) que l'équation $Au = 0$ possède une solution formelle $u = x^{\lambda_1} v$ avec $v \in k\, [[x]]$. Alors A se factorise sous la forme $A = A_1 P_1$ avec

$$P_1 = \partial - \frac{\partial(u)}{u} \text{ et l'on a } \frac{\partial(u)}{u} = \lambda_1 + \frac{\partial(v)}{v} \text{ avec } \frac{\partial(v)}{v} \in x\, k\, [[x]].$$

2.15. Nous utilisons les notations du paragraphe 2.5.2. Si $\bar{L}$ désigne le corps résiduel de L, alors le corps résiduel de E s'identifie à $\bar{L}(X)$. Par passage au quotient la dérivation $\partial = \dfrac{d}{dx}$ sur E donne la dérivation $\dfrac{d}{dx}$ sur $\bar{L}(X)$ qui n'est pas triviale. Nous noterons, pour $m \in N$, $\mathscr{P}_m$ l'espace des polynômes différentiels de degré $\leqslant m$ à coefficients dans $\bar{L}(X)$. Nous notons encore $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation de E.

THÉORÈME. *Soit* $A \in \mathcal{O}[\partial]$ *de degré* $m + n$. *Supposons que son image* $\bar{A}$ *dans* $\bar{L}(X)[\partial]$ *se factorise sous la forme*

$$\bar{A} = Q^* P^*$$

où P^* *est unitaire de degré* n.

Alors si l'application

$$(U, V) \mapsto UP^* + Q^* V$$

de $\mathscr{P}_{m-1} \times \mathscr{P}_{n-1}$ *dans* $\mathscr{P}_{m+n-1}$ *est injective, il existe un relèvement unique* Q, P *de* $Q^* P^*$ *avec* $\deg Q = m$, $\deg P = n$, P *unitaire, tel que* $A = QP$.

On trouvera la démonstration dans [Dw] § 6. On montre de plus que si les coefficients de A sont des éléments analytiques admissibles (cf. § 2.5.3) alors les coefficients de P et Q le sont également.