Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

LEMMES DE HENSEL POUR LES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS. APPLICATION A LA RÉDUCTION FORMELLE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

par P. Robba

Introduction

Etant donné un système differentiel $\frac{dY}{dx} = MY$, où M est une matrice méromorphe en 0, on sait qu'il existe une base de solutions formelles de la forme

$$e^{P(t^{-1}) + C \log t}\,\Phi(t)$$

avec $t^p = x$ pour un entier p convenable, où P est une matrice diagonale à coefficients polynomiaux, C est une matrice constante et Φ est une matrice $\in Gl_n(\mathbf{C}[[t]])$. (Cf. Turittin [Tu], Wasow [Wa], Katz [Ka], Levelt [Le], Malgrange [Ma 1]).

Si maintenant on considère une équation différentielle linéaire d'ordre n, on sait de façon classique ramener son étude à celle d'un système différentiel. Réciproquement d'ailleurs, l'étude d'un système différentiel se ramène, grâce au lemme du vecteur cyclique ([De], Lemme II.1.3), à celle d'une équation différentielle.

Si dans le cas des points réguliers et des points singuliers réguliers, l'étude d'une équation différentielle se faisait directement, (voir par exemple Ince [In]), dans le cas d'un point singulier irrégulier on considérait toujours le cas des systèmes. Or, récemment, Malgrange [Ma2] a proposé une méthode directe de réduction des équations différentielles. Sa méthode consiste à obtenir une factorisation formelle (c'est-à-dire à coefficients séries formelles) d'une équation différentielle associée à la décomposition de son polygone de Newton. Les énoncés qu'il obtient sont tout à fait analogues aux lemmes de Hensel classiques de factorisation des polynômes dans les corps valués ultramétriques complets (voir [Am] par exemple). Signalons que dans le contexte différent des équations différentielles p-adique d'autres résultats du type lemme de Hensel avaient déjà été obtenus par Dwork et moi-même [Dw].

Je me propose de traiter ici dans son cadre le plus général le problème de factorisation des opérateurs différentiels. On verra que les polynômes différentiels se comportent approximativement comme les polynômes (commutatifs). Je m'efforcerai d'ailleurs, chaque fois que cela sera possible, de conserver les définitions et les démonstrations utilisées dans le cas commutatif. On montrera ensuite comment ces théorèmes de factorisation (lemmes de Hensel) permettent d'étudier une équation différentielle près d'un point singulier irrégulier.

Dans la première partie on introduit la fonction de valuation d'un opérateur différentiel à coefficients dans un corps valué ultramétrique et on établit ses principales propriétés. Dans l'étude des propriétés de factorisation d'un polynôme, une longue tradition qui remonte à Newton veut que l'on fasse intervenir le polygone de Newton. (Ainsi Malgrange a la suite de Ramis [Ra] utilise le polygone de Newton d'un opérateur différentiel). Si l'on appelle fonction de Newton la fonction dont le graphe est le polygone de Newton, fonction de Newton et fonction de valuation sont mises en dualité par une transformation de Legendre ainsi que l'a observé Lazard [La]. Or l'outil vraiment commode pour les démonstrations est la fonction de valuation. De plus la fonction de valuation s'étend de façon naturelle aux fractions rationnelles et aux polynômes à plusieurs variables, ce qui n'est pas le cas pour le polygone de Newton. A mon avis, le seul avantage du polygone de Newton est que, dans les exemples numériques, il est plus facile à tracer que le polygone de valuation.

Dans la deuxième partie on établit différents théorèmes de factorisation. On montre d'une part qu'il existe une factorisation d'un polynôme différentiel liée à la présence de sommets sur son polygone de valuation. On montre d'autre part comment une factorisation approchée peut être raffinée en une factorisation exacte.

Dans une troisième partie on montre comment ces théorèmes de factorisation nous permettent d'obtenir la réduction formelle d'une équation différentielle au voisinage d'un point singulier irrégulier. La démonstration que nous donnons ne diffère guère de la démonstration de Malgrange dans [Ma 2]. Nous montrons que le module différentiel associé à un opérateur différentiel ne change pas pour de petites variations des coefficients. Un tel résultat a été obtenu par Malgrange [Ma 2], mais nous améliorons ses estimations et l'utilisation de la fonction de valuation nous permet d'éviter de longs et fastidieux calculs.

Je tiens à remercier D. Bertrand qui m'a indiqué les résultats de Malgrange et avec qui j'ai eu d'intéressantes discussions sur ce sujet.