LEMMES DE HENSEL POUR LES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS. APPLICATION A LA RÉDUCTION FORMELLE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

par P. ROBBA

INTRODUCTION

Etant donné un système différentiel $\frac{dY}{dx} = MY$, où M est une matrice méromorphe en 0, on sait qu'il existe une base de solutions formelles de la forme

$$e^{P(t^{-1}) + C \log t}\,\Phi(t)$$

avec $t^p = x$ pour un entier p convenable, où P est une matrice diagonale à coefficients polynomiaux, C est une matrice constante et Φ est une matrice $\in Gl_n(\mathbf{C}\,[[t]])$. (Cf. Turittin [Tu], Wasow [Wa], Katz [Ka], Levelt [Le], Malgrange [Ma 1]).

Si maintenant on considère une équation différentielle linéaire d'ordre n, on sait de façon classique ramener son étude à celle d'un système différentiel. Réciproquement d'ailleurs, l'étude d'un système différentiel se ramène, grâce au lemme du vecteur cyclique ([De], Lemme II.1.3), à celle d'une équation différentielle.

Si dans le cas des points réguliers et des points singuliers réguliers, l'étude d'une équation différentielle se faisait directement, (voir par exemple Ince [In]), dans le cas d'un point singulier irrégulier on considérait toujours le cas des systèmes. Or, récemment, Malgrange [Ma2] a proposé une méthode directe de réduction des équations différentielles. Sa méthode consiste à obtenir une factorisation formelle (c'est-à-dire à coefficients séries formelles) d'une équation différentielle associée à la décomposition de son polygone de Newton. Les énoncés qu'il obtient sont tout à fait analogues aux lemmes de Hensel classiques de factorisation des polynômes dans les corps valués ultramétriques complets (voir [Am] par exemple). Signalons que dans le contexte différent des équations différentielles p-adique d'autres résultats du type lemme de Hensel avaient déjà été obtenus par Dwork et moi-même [Dw].

Je me propose de traiter ici dans son cadre le plus général le problème de factorisation des opérateurs différentiels. On verra que les polynômes différentiels se comportent approximativement comme les polynômes (commutatifs). Je m'efforcerai d'ailleurs, chaque fois que cela sera possible, de conserver les définitions et les démonstrations utilisées dans le cas commutatif. On montrera ensuite comment ces théorèmes de factorisation (lemmes de Hensel) permettent d'étudier une équation différentielle près d'un point singulier irrégulier.

Dans la première partie on introduit la fonction de valuation d'un opérateur différentiel à coefficients dans un corps valué ultramétrique et on établit ses principales propriétés. Dans l'étude des propriétés de factorisation d'un polynôme, une longue tradition qui remonte à Newton veut que l'on fasse intervenir le polygone de Newton. (Ainsi Malgrange a la suite de Ramis [Ra] utilise le polygone de Newton d'un opérateur différentiel). Si l'on appelle fonction de Newton la fonction dont le graphe est le polygone de Newton, fonction de Newton et fonction de valuation sont mises en dualité par une transformation de Legendre ainsi que l'a observé Lazard [La]. Or l'outil vraiment commode pour les démonstrations est la fonction de valuation. De plus la fonction de valuation s'étend de façon naturelle aux fractions rationnelles et aux polynômes à plusieurs variables, ce qui n'est pas le cas pour le polygone de Newton. A mon avis, le seul avantage du polygone de Newton est que, dans les exemples numériques, il est plus facile à tracer que le polygone de valuation.

Dans la deuxième partie on établit différents théorèmes de factorisation. On montre d'une part qu'il existe une factorisation d'un polynôme différentiel liée à la présence de sommets sur son polygone de valuation. On montre d'autre part comment une factorisation approchée peut être raffinée en une factorisation exacte.

Dans une troisième partie on montre comment ces théorèmes de factorisation nous permettent d'obtenir la réduction formelle d'une équation différentielle au voisinage d'un point singulier irrégulier. La démonstration que nous donnons ne diffère guère de la démonstration de Malgrange dans [Ma 2]. Nous montrons que le module différentiel associé à un opérateur différentiel ne change pas pour de petites variations des coefficients. Un tel résultat a été obtenu par Malgrange [Ma 2], mais nous améliorons ses estimations et l'utilisation de la fonction de valuation nous permet d'éviter de longs et fastidieux calculs.

Je tiens à remercier D. Bertrand qui m'a indiqué les résultats de Malgrange et avec qui j'ai eu d'intéressantes discussions sur ce sujet.

1. Fonction de valuation d'un polynôme différentiel

1.1. Soit K un corps valué ultramétrique complet muni d'une dérivation ∂. On note v la valuation de K et $\alpha(\partial)$ (ou α si aucune confusion n'est à craindre) le nombre

$$\alpha(\partial) = \inf_{a \in K,\, a \neq 0} v(\partial(a)) - v(a) .$$

On suppose dorénavant que $\alpha(\partial) > -\infty$; ceci signifie que la dérivation est continue. La dérivation est triviale si et seulement si $\alpha = +\infty$.

On note D_K (ou D si aucune confusion n'est à craindre) l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans K, i.e. l'ensemble des sommes finies $P = \Sigma\, a_i\, \partial^i$ $(a_i \in K)$ muni de l'addition évidente et de la multiplication définie par $\partial^i \partial^j = \partial^{i+j}$, $\partial a = a\partial + \partial(a)$.

1.2. Pour tout $t \in \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $P = \Sigma\, a_i\, \partial^i \in D_K$ on pose

$$v(P, t) = \inf_i v(a_i) + it .$$

On note $N(P, t)$ (resp. $n(P, t)$) le plus grand (resp. le plus petit) entier i tel que $v(a_i) + it = v(P, t)$.

Si P est le polynôme nul on pose, pour tout t, $v(P, t) = +\infty$ et $N(P, t) = n(P, t) = -\infty$.

La fonction $t \mapsto v(P, t)$ est appelée *la fonction de valuation* de P. C'est une fonction continue, concave, affine par morceaux. Son graphe est appelé *le polygone de valuation* de P. Il est clair que $N(P, t)$ (resp. $n(P, t)$) est la dérivée à gauche (resp. à droite) de $v(P, t)$. On a pour tous s et t de $\overline{\mathbf{R}}$, $t < s$

$$N(t) \geqslant n(t) \geqslant N(s) \geqslant n(s) .$$

On dit que $t \in \mathbf{R}$ est une valeur exceptionnelle (pour P) si $N(P, t) \neq n(P, t)$. les valeurs exceptionnelles pour P sont en nombre fini.

Pour des raisons qui apparaîtront au § 1.8, on considère que la fonction $v(P, t)$ et la fonction $N(P, t)$ ne sont définies que pour $t \leqslant \alpha(\partial)$ et que la fonction $n(P, t)$ n'est définie que pour $t < \alpha(\partial)$.

1.3. *Propriétés de la fonction de valuation dans le cas commutatif.*

Nous allons rappeler les principales propriétés de la fonction de valuation dans le cas commutatif. Nous utiliserons certaines de ces propriétés par la suite. Nous donnons une idée des démonstrations de ces propriétés. On trouvera les démonstrations détaillées par exemple dans [Am].

1.3.1. Soit $P \in K[X]$, soit $x \neq 0$ de K. On a $v(P(x)) \geqslant v(P, v(x))$ et on a l'égalité si $v(x)$ n'est pas exceptionnel pour P. (C'est évident).

1.3.2. On déduit facilement de 1.3.1 que si la valuation de K est dense on a pour tout $t \in \mathbf{R}$, $v(P, t) = \inf_{v(x) \geqq t} v(P(x))$, ce qui relie la fonction de valuation à la norme de la convergence uniforme.

Pour établir les propriétés de la fonction de valuation on peut toujours supposer, quite à considérer un surcorps de K, que la valuation de K est dense, ce que nous ferons désormais.

1.3.3. Pour tous P, $Q \in K[X]$ et tout $t \in \mathbf{R}$,

$$v(PQ, t) = v(P, t) + v(Q, t) .$$

D'après 1.3.1 c'est évident lorsque t n'est exceptionnel ni pour P ni pour Q ni pour PQ et que t appartient au groupe des valeurs de K. Par continuité la propriété s'étend à $\mathbf{R}$.

1.3.4. Par dérivation on déduit de 1.3.3 que

$$N(PQ, t) = N(P, t) + N(Q, t) \quad \text{et} \quad n(PQ, t) = n(P, t) + n(Q, t) .$$

1.3.5. En décomposant P en facteurs du premier degré dans la clôture algébrique K^{alg} de K, on déduit facilement de 1.3.4 que

$N(P, t)$ est le nombre de zéros de P dans K^{alg} de valuation $\geqslant t$

$n(P, t)$ est le nombre de zéros de P dans K^{alg} de valuation $> t$

$N(P, t) - n(P, t)$ est le nombre de zéros de P dans K^{alg} de valuation t.

Les valeurs exceptionnelles pour P sont donc les valuations des zéros de P dans K^{alg}.

1.3.7. Soit $P \in K[X]$ et soit $\eta \in K$. Alors pour $t \leqslant v(\eta)$ on a $v(P(X+\eta), t) = v(P(X), t)$. Cela se montre en utilisant 1.3.2 et en remarquant que, pour $t \leqslant v(\eta)$, les disques $\{X \in K, v(X+\eta) \geqslant t\}$ et $\{X \in K, v(X) \geqslant t\}$ coïncident.

1.4. Bien que nous ne l'utiliserons pas par la suite, nous allons introduire le polygone de Newton d'un opérateur différentiel afin de faire le lien avec les travaux d'autres auteurs.

Le polygone de Newton de $P = \Sigma a_i \partial^i \in D_K$ est la frontière de l'enveloppe supérieure convexe des points $(i, v(a_i)) \in \overline{\mathbf{R}}^2$. Notons $Nw(P, t)$ la fonction dont le graphe est le polygone de Newton de P. Les fonctions $-v(P, t)$ et $Nw(P, t)$ sont mises en dualité par une transformation de Legendre (cf. [La] § 1.10 pour plus de détails). En particulier les valeurs exceptionnelles pour P sont les pentes des côtés de son polygone de Newton changées de signe.

Comme nous ne considérons la fonction de valuation que dans l'intervalle $(-\infty, \alpha]$; nous ne conservons que les côtés du polygone de Newton de P de pente $\geqslant -\alpha$.

1.5. *Addition.*

PROPOSITION. *Soient P et $Q \in D_K$. On a pour tout t*

$$v(P+Q, t) \geqslant \inf\big(v(P, t), v(Q, t)\big).$$

On a égalité si $v(P, t) \neq v(Q, t)$ ou si $N(P, t) \neq N(Q, t)$ ou si $n(P, t) \neq n(Q, t)$.

C'est évident.

1.6. *Multiplication.*

Les propriétés que nous allons établir dans ce paragraphe et les suivants montrent que, pour $t \leqslant \alpha$ et moyennant un terme correctif, du point de vue de la fonction de valuation tout se passe comme si la dérivation commutait avec la multiplication par les éléments de K.

PROPOSITION. 1) *Soient $P(X), Q(X) \in K[X]$ et soient $P(\partial), Q(\partial)$ les opérateurs différentiels associés. Soit $R(X) = P(X)\,Q(X) \in K[X]$ et soit $R(\partial)$ l'opérateur différentiel associé. On a pour tout $t \leqslant \alpha$*

$$v\big(R(\partial) - P(\partial)\,Q(\partial), t\big) \geqslant v(P, t) + v(Q, t) + \alpha - t.$$

2) *Soient $P, Q \in D_K$. Pour $t \leqslant \alpha$ on a*

$$v(PQ, t) = v(P, t) + v(Q, t)$$
$$N(PQ, t) = N(P, t) + N(Q, t).$$

Pour $t < \alpha$ on a

$$n(PQ, t) = n(P, t) + n(Qt).$$

Démonstration :

1) Vérifions le pour $P(X) = X^i$ *et* $Q(X) = a$. On a

$$a\partial^i - \partial^i a = - \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} \partial^i(a)\, \partial^{i-j}$$

d'où pour $t \leqslant \alpha$

$$v(a\partial^i - \partial^i a, t) \geqslant \inf_{j \geqq 1} \big(v(a) + j\alpha + (i-j)\, t\big) = v(a) + it + \alpha - t\,.$$

Soient maintenant $P(X) = \sum_i a_i X^i$ et $Q(X) = \sum_j b_j X^j$. On a

$$R(\partial) - P(\partial)\, Q(\partial) = \sum_{i,j} a_i (b_j \partial^i - \partial^i b_j)\, \partial^j\,.$$

Par conséquent, utilisant 1.5, on obtient

$$\begin{aligned} v\big(R(\partial) - P(\partial)\, Q(\partial), t\big) &\geqslant \inf_{i,j} \big(v(a_i) + v(b_j) + it + jt + \alpha - t\big) \\ &= \inf_i \big(v(a_i) + it\big) + \inf_j \big(v(b_j) + jt\big) + \alpha - t \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

2) D'après 1.3.3 on a $v(R, t) = v(P, t) + v(Q, t)$. Pour $t < \alpha$ la relation annoncée s'en déduit grâce à 1) et à la proposition 1.5. Le cas $t = \alpha$ s'obtient par continuité.

1.7. *Adjonction.*

Soit $P = \Sigma\, a_i\, \partial^i \in D_K$. Son adjoint est l'opérateur $P^* = \Sigma\, (-1)^i\, \partial^i\, a_i$ cf. [In] (5.3). On voit comme dans la proposition précédente que l'on a pour $t \leqslant \alpha$

$$v(P^*, t) = v(P, t)\,.$$

1.8. La proposition 1.6. 2) n'est plus vraie pour $t > \alpha$. En effet soit $a \in K$, avec $\partial(a) \neq 0$. Soit $P = \partial$, $Q = a$; on a $PQ = a\partial + \partial(a)$ et donc pour $t > v\big(\partial(a)\big) - v(a)$ on aura

$$\begin{aligned} v(PQ, t) = \inf \big(v\big(\partial(a)\big), v(a) + t\big) = v\big(\partial(a)\big) &\neq v(P, t) + v(Q, t) \\ &= v(a) + t\,. \end{aligned}$$

C'est pour cette raison qu'on considère que la fonction de valuation $v(P, t)$ n'est définie que pour $t \leqslant \alpha$. On notera que, quelle que soit la représentation de l'opérateur $P \in K_D$, $P = \sum_i a_i\, \partial^i\, b_i$, on a toujours pour $t \leqslant \alpha$, $v(P, t) = \inf \big(v(a_i) + v(b_i) + it\big)$.

1.9. *Homothétie.*

PROPOSITION. 1) *Soit* $P(X) \in K[X]$ *et soit* $P(\partial)$ *l'opérateur différentiel associé. Soit* $\xi \in K$. *Notons* $R(X) = P(\xi X) \in K[X]$ *et soit* $R(\partial)$ *l'opérateur différentiel associé. Pour* $t \leqslant \alpha$ *on a*

$$v\big(R(\partial) - P(\xi\partial), t\big) \geqslant v\big(P, t + v(\xi)\big) + \alpha - t\,.$$

2) *Pour* $t \leqslant \alpha$ *on a*

$$v\big(P(\xi\partial), t\big) = v\big(P(\partial), t + v(\xi)\big)\,.$$

Pour éviter toute ambiguïté indiquons que si $P(\partial) = \Sigma\, a_i\, \partial^i$, alors $R(\partial) = \Sigma\, a_i\, \xi^i\, \partial^i$ et $P(\xi\partial) = \Sigma\, a_i\, (\xi\partial)^i$.

Démonstration :

1) Vérifions l'assertion pour $P(\partial) = \partial^i$. On fait une récurrence sur i. Pour $i = 1$ c'est vérifié puisque $R(\partial) - P(\xi\partial) = 0$.

Posons $\xi^i\, \partial^i - (\xi\partial)^i = Q_i(\partial)$.

Alors $Q_{i+1}(\partial) = \xi\, \partial\, Q_i(\partial) - i\, \partial(\xi)\, \xi^i\, \partial^i$.

Notre hypothèse de récurrence est

$$v\big(Q_i(\partial), t\big) \geqslant iv(\xi) + it + \alpha - t\,.$$

En appliquant 1.5 et 1.6 on obtient à l'ordre $i + 1$

$$\begin{aligned} v\big(Q_{i+1}(\partial), t\big) &\geqslant \inf\big(v\big(\xi\partial Q_i(\partial), t\big), (i+1)\, v(\xi) + \alpha + it\big) \\ &= (i+1)\, v(\xi) + (i+1)\, t + \alpha - t\,. \end{aligned}$$

Soit maintenant $P(X) = \sum_i a_i\, X^i$. On a $R(\partial) - P(\xi\partial) = \sum_i a_i\, Q_i(\partial)$. En tenant compte de 1.5 on obtient donc

$$\begin{aligned} v\big(R(\partial) - P(\xi\partial), t\big) &\geqslant \inf_i \big(v(a_i) + i\big(t + v(\xi)\big) + \alpha - t\big) \\ &= v\big(P(\partial), t + v(\xi)\big) + \alpha - t\,. \end{aligned}$$

2) Dans le cas commutatif on a $v(R, t) = v\big(P, t + v(\xi)\big)$, cela se voit facilement en appliquant 1.3.2. Alors en appliquant 1) et la proposition 1.5 on obtient la relation annoncée pour $t < \alpha$. Le cas $t = \alpha$ s'en déduit par continuité.

1.10. *Remarque.*

Dans le cas où la dérivation n'est pas triviale, la proposition précédente suggère d'associer au polynôme différentiel $P(\partial)$ la fonction

$$w\big(P(\partial), t\big) = v\big(P(\partial), t + \alpha(\partial)\big)$$

définie pour $t \leqslant 0$. Cette fonction est liée de façon plus intrinsèque à l'opérateur différentiel et ne dépend pas de la dérivation choisie pour le représenter. En effet, soit $\xi \in K$, $\xi \neq 0$, et considérons la dérivation $\delta = \xi\partial$. On a $\alpha(\delta) = \alpha(\partial) + v(\xi)$. Maintenant l'opérateur différentiel $P(\partial)$ est représenté à l'aide de la dérivation δ par $Q(\delta) = P(\xi^{-1}\partial)$. On aura donc grâce à la proposition 1.8, pour $t \leqslant 0$

$$\begin{aligned} w\big(Q(\delta), t\big) = v\big(Q(\delta), t + \alpha(\delta)\big) &= v\big(P(\partial), t - v(\xi) + \alpha(\partial) + v(\xi)\big) \\ &= w\big(P(\partial), t\big). \end{aligned}$$

Une telle normalisation n'est évidemment pas possible dans le cas commutatif (dérivation triviale).

Pour garder notre exposé aussi proche du cas commutatif que possible nous utiliserons la fonction $v(P, t)$ et non la fonction $w(P, t)$, préférant, quand cela sera nécessaire, choisir une dérivation ∂ telle que $\alpha(\partial) = 0$.

1.11. *La fonction de Gerard-Levelt.*

Soit k un corps et soit $K = k((x))$ muni de sa valuation x-adique. Considérons sur K la dérivation $\partial = x\dfrac{d}{dx}$. On a $\alpha(\partial) = 0$. Si $P = \Sigma\, a_i\, \partial^i \in D_K$, P d'ordre m, on voit facilement, compte tenu de la proposition 1.8, que la fonction $\rho_k(P)$ de Gerard-Levelt introduite par Ramis [Ra] à la suite de Gerard-Levelt [Ge] est liée à la fonction de valuation par la relation

$$\rho_k(P) = v(a_m) - mk - v(P, -k) \qquad k \geqslant 0\,.$$

Le polygone de Newton $\mathscr{P}^+(P)$ considéré par Ramis [Ra] puis Malgrange [Ma] est le polygone de Newton de P prolongé par un côté de pente 0 pour remplacer les éventuels côtés de pente <0 que l'on doit supprimer (cf. § 1.4).

1.12. *Translation.*

Proposition. 1) *Soit $P(X) \in K[X]$ et soit $P(\partial)$ l'opérateur différentiel associé. Soit $\eta \in K$. Posons $R(X) = P(X+\eta) \in K[X]$. On a pour $t \leqslant \inf(\alpha, v(\eta))$.*

$$v\big(R(\partial)-P(\partial+\eta),t\big) \geqslant v\big(P(\partial),t\big) + \alpha - t\,.$$

2) *Pour* $t \leqslant \inf\big(\alpha, v(\eta)\big)$ *on a*

$$v\big(P(\partial+\eta),t\big) = v\big(P(\partial),t\big)\,.$$

Si $v(\eta) < \alpha$ *on a*

$$n\big(P(\partial+\eta),v(\eta)\big) = n\big(R,v(\eta)\big)\,.$$

Démonstration :

1) Vérifions le pour $P(\partial) = \partial^i$. On fait une récurrence sur i. Pour $i = 0$ c'est vérifié puisque $R(\partial) - P(\partial+\eta) = 0$.

Posons $\sum\limits_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \eta^j \partial^{i-j} - (\partial+\eta)^i = Q_i(\partial)$.

Alors $Q_{i+1}(\partial) = (\partial+\eta)\,Q_i(\partial) - \sum\limits_{j=1}^{i} \binom{i}{j} j\,\partial(\eta)\,\eta^{j-1}\,\partial^{i-j}$.

Notre hypothèse de récurrence est

$$v\big(Q_i(\partial),t\big) \geqslant it + \alpha - t \qquad \text{si} \qquad t \leqslant \inf\big(\alpha, v(\eta)\big)\,.$$

En appliquant 1.5 et 1.6 on obtient à l'ordre $i+1$

$$\begin{aligned} v\big(Q_{i+1}(\partial),t\big) &\geqslant \inf\Big(v\big(Q_i(\partial),t\big) + \inf\big[v(\eta),t\big],\ \inf_{1\leqq j\leqq i}\big[\alpha + jv(\eta) \\ &\qquad + (i-j)\,t\big]\Big) \\ &\geqslant it + \alpha = i(t+1) + \alpha - t \qquad \text{si} \qquad t \leqslant \inf\big(\alpha, v(\eta)\big)\,. \end{aligned}$$

Soit maintenant $P(X) = \sum\limits_i a_i X^i$. On a $R(\partial) - P(\partial+\eta) = \sum\limits_i a_i\,Q_i(\partial)$. Par conséquent, en utilisant 1.5, on obtient pour $t \leqslant \inf\big(\alpha, v(\eta)\big)$

$$v\big(R(\partial)-P(\partial+\eta),t\big) \geqslant \inf_i\big(v(a_i) + it + \alpha - t\big) = v(P,t) + \alpha - t\,.$$

2) Pour $t \leqslant v(\eta)$ on a, d'après 1.3.7, $v(R,t) = v(P,t)$; d'où, si de plus $t < \alpha$, $v\big(P(\partial+\eta),t\big) = v(P,t)$. (Le cas éventuel $t = \alpha$ s'en déduit encore par continuité).

Si $v(\eta) < \alpha$ on vient de voir que

$$v\big(R(\partial)-P(\partial+\eta),t\big) > v\big(R(\partial),t\big) \qquad \text{pour} \qquad t = v(\eta)\,;$$

donc, par continuité, ceci reste vrai dans un voisinage de $v(\eta)$ et alors on a dans ce voisinage $v\big(R(\partial),t\big) = v\big(P(\partial+\eta),t\big)$, ce qui entraîne l'égalité des dérivées à droites en $t = v(\eta)$, c'est-à-dire la formule annoncée.

1.13. *Continuité de la division.*

Rappelons que D_K est un anneau euclidien aussi bien pour la division à droite que la division à gauche.

Définitions. Soit $P \in D_K$, $P \neq 0$. On dit que P est *t-dominant* si $N(P, t) = \deg P$. On dit que P est *t-extrémal* si $N(P, t) = \deg P$ et $n(P, t) = 0$. On peut encore dire que P est t-dominant s'il n'a pas de valeurs exceptionnelles $< t$, et qu'il est t-extrémal si sa seule valeur exceptionnelle est t. Dans le cas commutatif P est t-dominant (resp. t-extrémal) si tous ses zéros dans K^{alg} sont de valuation $\geqslant t$ (resp. $= t$) ainsi qu'il résulte de 1.3.6.

Proposition. *Soit $P \in D_K$, t-dominant avec $t \leqslant \alpha$. Soient A, Q, $R \in D_K$ tels que*

$$A = QP + R \qquad \deg R < \deg P .$$

On a alors

$$v(Q, t) \geqslant v(A, t) - v(P, t), \quad v(R, t) \geqslant v(A, t) .$$

Même énoncé pour la division à gauche : $A = PQ' + R'$.

Démonstration : On a

$$N(QP, t) = N(Q, t) + N(P, t) \geqslant N(P, t) = \deg P > \deg R \geqslant N(R, t) .$$

On a donc d'après 1.5

$$v(QP + R, t) = \inf\big(v(QP, t), v(R, t)\big) .$$

D'où le résultat en appliquant 1.6.

1.14. *Opérateurs fuchsiens.*

Considérons le cas $K = k\big((x)\big)$ avec $\partial = \dfrac{d}{dx}$ (cf. § 1.11). On a $\alpha(\partial) = -1$. Il est facile de voir que dire que P est (-1)-dominant équivaut à dire que P vérifie la condition de Fuchs, (poir singulier-régulier).

Par analogie on dira dans le cas général que $P \in D_K$ est *Fuchsien* si P est α-dominant. Comme à la remarque 1.10 on voit que cette propriété ne dépend que de l'opérateur différentiel et pas du choix de la dérivation.

2. Lemmes de Hensel

Dans ce paragraphe il est essentiel de supposer que *K est complet pour sa valuation.*

2.1. Dans le cas commutatif il existe deux types de lemmes de Hensel. Une propriété de factorisation d'un polynôme relativement aux valeurs exceptionnelles qui lui sont associées (pentes du polygone de Newton). Pour les polynômes différentiels on aura exactement la même propriété pour les valeurs exceptionnelles $< \alpha$ (pentes $> -\alpha$) (corollaire 2.6). Toute la partie correspondant à $t \geqslant \alpha$ sera regroupée en un seul facteur fuchsien (α-dominant) (théorème 2.4).

Par ailleurs pour un polynôme à coefficients dans l'anneau de valuation de K, si par passage au quotient on a une factorisation dans le corps résiduel en facteurs premiers entre eux, cette factorisation se relève. Dans le cas des opérateurs différentiels pour pouvoir passer au quotient il faut d'abord supposer que la dérivation envoie l'anneau de valuation de K dans lui-même, c'est-à-dire que $\alpha \geqslant 0$. Si $\alpha > 0$, la dérivation est triviale sur le corps résiduel, donc par passage au quotient les polynômes différentiels commutent; alors une factorisation en facteurs premiers entre eux se relève (théorème 2.5). Dans le cas $\alpha = 0$ on ne peut pas obtenir de résultat général. Chaque cas d'espèce demande un traitement particulier. Le cas particulier $K = k\left((x)\right)$ et $\partial = x\dfrac{d}{dx}$ sera traité plus loin (Théorème 2.13).

2.2. Lemme. *Soient* $A, P, Q, P', Q' \in D_K$ *tels que*

(1) $A = QP = P'Q'$

(2) $\deg P = \deg P'$ ($\deg Q = \deg Q'$)

(3) *pour tous* $\bar{P}, \bar{Q} \in D$, $\deg \bar{P} < \deg P$ *et* $\bar{P}Q' = \bar{Q}P$ *entraînent* $\bar{P} = \bar{Q} = 0$.

Alors on a $D/DP \simeq D/DP'$, $D/DQ \simeq D/DQ'$, $D/DA \simeq D/DP \oplus D/DQ$. *(Les isomorphismes étant des isomorphismes de* D*-modules à gauche).*

Pour la notion de D-module on renvoit à [Mn].

Démonstration (MALGRANGE). On considère la suite exacte de D-modules à gauche

$$0 \to D/DQ \overset{\lambda}{\to} D/DA \overset{\mu}{\to} D/DP \to 0$$

où la première flèche (resp. la seconde) est définie par passage au quotient à partir de la multiplication à droite par P (resp. à partir de l'identité). De même on a la suite exacte

$$0 \to D/DP' \overset{\lambda'}{\to} D/DA \overset{\mu'}{\to} D/DQ' \to 0\,.$$

Nous allons montrer que le morphisme $\mu\lambda'$ est un isomorphisme de D/DP' sur D/DP. Comme ces deux modules sont finis et de même rang sur K, il suffit de montrer que $\mu\lambda'$ est injectif. Or, soit $\sigma \in D/DP'$ tel qu'on ait $\mu\lambda'(\sigma) = 0$. En relevant σ en $S \in D$ cela signifie qu'on a $SQ' \in DP$. L'ensemble des S vérifiant cette dernière condition est un idéal à gauche de D contenant P', et il suffit de montrer que P' engendre cet idéal. Si c'était faux, le générateur $\bar{P}$ de cet idéal serait de degré $<$ deg P' et l'on aurait la relation $\bar{P}Q' = \bar{Q}P$, ce qui est incompatible avec (3).

(On montre de même que $\mu'\lambda$ est un isomorphisme de D/DQ sur D/DQ').

Mais alors l'application $\lambda'(\mu\lambda')^{-1}$ est un relèvement de μ ce qui démontre la dernière assertion.

2.3. *Remarque.*

On a observé dans la démonstration précédente que si l'on avait une factorisation $A = QP$, on identifiait de façon canonique D/DQ à un sous-module de D/DA. Réciproquement soit N un sous-D-module du D-module $M = D/DA$. Soit m l'image dans M du polynôme constant 1 de D, c'est un vecteur cyclique de M et l'on a $Am = 0$. Soit u l'image de m dans le D-module quotient M/N; u est un vecteur cyclique de M/N. Si $P \in D$ est le polynôme différentiel unitaire minimal que annihile u, alors P divise A et $M/N \simeq D/DP$. Soit $A = QP$, D/DQ s'identifie avec le noyau de l'application quotient $M = M/N$, donc $D/DQ \simeq N$. On voit donc qu'il est équivalent d'étudier la factorisation de l'opérateur A et de rechercher les sous-modules du D-module D/DA.

2.4. THÉORÈME. *Soit* $A \in D_K$. *Soit* $t \leqslant \alpha$.

1) *Il existe* $Q, P \in D_K$ *avec* P *t-dominant*, deg $P = N(A, t)$, *tels que* $A = QP$.

2) *(Unicité). Si l'on a une autre décomposition* $A = Q_1 P_1$ *vérifiant les mêmes conditions, il existe* $a \neq 0$ *de* K *tel que* $Q_1 = Qa^{-1}$ *et* $P_1 = aP$.

3) *Il existe* $Q', P' \in D_K$ *avec* P' *t-dominant,* $\deg P' = N(A, t)$, *tels que* $A = P' Q'$.

4) *On a* $D/DP \simeq D/DP'$, $D/DQ \simeq D/DQ'$, $D/DA \simeq D/DP \oplus D/DQ$.

Démonstration :

1) Soit $A = \Sigma a_i \partial^i$. Posons $N = N(A, t)$. Posons $P_0 = \sum_{i \leq N} a_i \partial^i$.

On définit $P_n\, Q_n$, R_n de D_K par les formules de récurrence

$$A = Q_n P_n + R_n \qquad \deg R_n < \deg P_n$$
$$P_{n+1} = P_n + R_n\,.$$

Soit $\lambda = v(A - P_0, t) - v(A, t)$. Il résulte de la définition de $N = N(A, t)$ que $\lambda > 0$.

Nous allons montrer par induction sur n que l'on a

$(\mathrm{i})_n$ P_n est t-dominant et $v(P_n, t) = v(A, t)$.

$(\mathrm{ii})_n$ $v(1 - Q_n, t) \geqslant \lambda$

$(\mathrm{iii})_n$ $v(R_n, t) \geqslant v(A, t) + (n+1)\lambda$

$(\mathrm{iv})_n$ $v(Q_{n+1} - Q_n, t) \geqslant (n+2)\lambda$.

Remarquons que P_0 est de degré N et que le coefficient de ∂^N dans P_0 est a_N; d'où

$$v(P_o, t) = \inf_{i \leq N} (v(a_i) + it) = a_N + Nt = \inf_i (v(a_i) + it) = v(A, t)$$

ce qui montre $(i)_0$.

Comme P_0 est t-dominant et que l'on a

$$A - P_o = (1 - Q_o) P + R_o \qquad \deg R_o < \deg P_o\,,$$

il résulte de la proposition 1.12 et de la définition de λ que l'on a

$$v(1 - Q_o, t) \geqslant v(A - P_o, t) - v(P_o, t) \geqslant \lambda$$

et

$$v(R_o, t) \geqslant v(A - P_o, t) \geqslant v(A, t) + \lambda$$

ce qui montre $(\mathrm{ii})_0$ et $(\mathrm{iii})_0$.

Comme l'on a

$$A = Q_nP_n + R_n = Q_{n+1}P_{n+1} + R_{n+1} = Q_{n+1}(P_n+R_n) + R_{n+1}$$

d'où

$$(1-Q_n)R_n = (Q_{n+1}-Q_n)P_n + R_{n+1} \qquad \deg R_{n+1} < \deg P_n$$

il résulte de $(\mathrm{i})_n$ $(\mathrm{ii})_n$ $(\mathrm{iii})_n$ et de la proposition 1.13 que

$$v(Q_{n+1}-Q_n, t) \geqslant v(1-Q_n, t) + v(R_n, t) - v(P_n, t) \geqslant (n+2)\lambda,$$

et
$$v(R_{n+1}, t) \geqslant v(1-Q_n, t) + v(R_n, t) \geqslant (n+2)\lambda$$

ce qui montre $(\mathrm{iv})_n$ et $(\mathrm{iii})_{n+1}$.

D'après $(\mathrm{iii})_n$ $v(R_n, t) > v(A, t) = v(P_n, t)$, donc

$$v(P_{n+1}, t) = v(P_n, t) = v(A, t).$$

Par ailleurs il est clair que P_{n+1} est de degré N et que le coefficient de ∂^N dans P_{n+1} est a_N. Il en résulte. comme pour P_0, que P_{n+1} est t-dominant, ce qui montre $(\mathrm{i})_{n+1}$.

Enfin d'après $(\mathrm{ii})_n$ et $(\mathrm{iv})_n$

$$v(1-Q_{n+1}, t) \geqslant \inf\big(v(1-Q_n, t), v(Q_n-Q_{n+1}, t)\big) \geqslant \lambda$$

ce qui montre $(\mathrm{ii})_{n+1}$.

Ceci achève la démonstration des formules $(\mathrm{i})_n$ ... $(\mathrm{iv})_n$.

On a pour tout n $\deg P_n = N$, $\deg R_n \leqslant \deg A$, $\deg Q_n \leqslant \deg A - N$. Les relations $(\mathrm{iii})_n$ et $(\mathrm{iv})_n$ montrent que les coefficients de R_n tendent vers 0 et que les coefficients de P_n et Q_n forment des suites de Cauchy. Comme K est complet ces suites convergent. Soient $P = \lim P_n$ et $Q = \lim Q_n$. On a $A = \lim (Q_nP_n + R_n) = QP$.

Enfin il est clair que le coefficient de ∂^N dans P est a_N. Ceci joint au fait que $v(P, t) = \lim v(P_n, t) = v(A, t)$ montre que P est t-extrémal et que $\deg P = N = N(A, t)$.

2) Effectuons la division euclidienne de P_1 par P. Comme $\deg P_1 = \deg P\,(=N(A, t))$ on a

$$P_1 = aP + R \qquad \deg R < \deg P, \qquad a \in K.$$

Comme P est t-extrémal ceci entraîne

$$N(R, t) \leqslant \deg R < \deg P = N(P, t).$$

De la relation $A = QP = Q_1P_1$ on tire

$$Q_1R = (Q_1 - Qa)P\,.$$

Comme $t \geqslant \alpha$ on a en premier lieu

$$N(Q_1, t) = N(A, t) - N(P_1, t) = 0$$

et par conséquent

$$N(Q_1 R, t) = N(Q_1, t) + N(R, t) = N(R, t) = N(Q_1 - Qa, t) + N(P, t).$$

Cette relation jointe à l'inégalité $N(R, v) < N(P, t)$ entraîne

$$N(R, t) = N(Q_1 - Qa, t) = -\infty$$

c'est-à-dire $R = Q_1 - Qa = 0$ ce qui démontre 2) .

3) Cela se fait comme en 1) en changeant l'ordre des produits.

4) Supposons qu'on ait $\bar{P}Q' = \bar{Q}P$ avec $\deg \bar{P} < \deg P$.

On a comme précédemment $N(Q', t) = 0$ et

$$N(\bar{P}, t) \leqslant \deg \bar{P} < \deg P = N(P, t)$$

ce qui, joint à

$$N(\bar{P}, t) + N(Q', t) = N(\bar{Q}, t) + N(P, t)$$

entraîne $\bar{P} = \bar{Q} = 0$. On applique alors le lemme 2.2.

2.5. *Exemples.*

2.5.1. Soit $K = k((x))$ muni de la dérivation $\partial = \dfrac{d}{dx}$ (cf. § 1.14). En appliquant le théorème précédent avec $t = \alpha = -1$, on obtient une décomposition de l'opérateur différentiel A en un facteur fuchsien P et un facteur Q totalement irrégulier, c'est-à-dire qui ne possède pas de facteur fuchsien de degré non nul.

2.5.2. Soit L un corps valué ultramétrique. L'application $P \mapsto v(P, 0)$ définie sur $L[X]$ s'étend à $L(X)$ et définit une valuation sur $L(X)$ appelée valuation de Gauss. Le complété de $L(X)$ pour cette valuation sera noté E (cf. [Dw] pour plus de détails). La dérivation $\partial = \dfrac{d}{dx}$ définie sur $L(X)$

est continue et s'étend à E. On a $\alpha(\partial) = 0$. Le théorème précédent s'applique donc pour $t \leqslant 0$. (Le cas $t = 0$ a été considéré dans [Ro]).

2.5.3. Remarquons que les résultats du § 1 sont encore valables si les coefficients des opérateurs différentiels sont pris non pas dans un corps mais dans un anneau valué. Dans la proposition 1.13 pour pouvoir effectuer la division euclidienne il faut bien sûr supposer que le coefficient du terme de plus haut degré de P est inversible dans l'anneau considéré.

En particulier la démonstration du théorème 2.4 reste valide si l'on suppose que le coefficient a_N de l'opérateur A est inversible.

Cette remarque nous sert dans la situation suivante:

Soit L un corps valué ultramétrique complet algébriquement clos. Soit S un sous-ensemble de L. Si f, définie sur S, est la limite uniforme sur S de fractions rationnelles sans pôles dans S on dit que f est un élément analytique sur S. Supposons que S soit une union de classes résiduelles de L; alors en utilisant les propriétés du paragraphe 1.3 on montre facilement que pour une fraction rationnelle f sans pôles dans S, $\inf_{x \in S} v(f(x)) = v(f, 0)$. Il en résulte que l'anneau $H(S)$ des éléments analytiques sur S s'identifie à un sous-anneau fermé de E, défini en 2.5.2. On dit que $f \in E$ est un élément analytique admissible (cf. [Dw]) s'il existe un sous-ensemble S formé de toutes les classes résiduelles sauf un nombre fini (on dira que S est standard) tel que f soit un élément analytique sur S. L'ensemble des éléments analytiques admissibles forme un sous-corps H de E qui n'est pas complet pour la valuation. Mais pour chaque $a \in H$, il existe un ensemble standard S tel que $a \in H(S)$ et que a ne s'annule pas dans S (cette dernière condition peut être réalisée car un élément analytique sur un ensemble standard n'a qu'un nombre fini de zéros). Alors l'anneau $H(S)$ est complet et a est inversible dans $H(S)$. Pour la dérivation $\partial = \dfrac{d}{dx}$ de H, $H(S)$ est stable. Le théorème 2.4 est donc encore valable pour les opérateurs à coefficients dans H bien que H ne soit pas complet.

2.6. Corollaire. *Soit* $A \in D_K$ *et soit* $t < \alpha$.

1) *Il existe* $Q, P \in D_K$, *avec* P *t-extrémal et* $\deg P = N(A, t) - n(A, t)$, *tels que* $A = QP$.

2) *On a également une factorisation* $A = P'Q'$ *où* P' *vérifie les mêmes conditions que* P.

3) *On a* $D/DP \simeq D/DP'$, $D/DQ \simeq D/DQ'$, $D/DA \simeq D/DP \oplus D/DQ$.

Démonstration. D'après le théorème 2.4 il existe $L, B \in D_K$, avec B t-dominant et $N(B, t) = N(A, t)$ tels que $A = LB$.

Alors $N(L, t) = 0$, donc $N(L, s) = 0$ pour $s \geqslant t$ et $n(L, s) = 0$ pour $s \geqslant t$. Par conséquent pour $s \geqslant t$ on a

$$N(B, s) = N(A, s) \quad \text{et} \quad n(B, s) = n(A, s).$$

Pour s assez voisin de t, $s > t$, on a $n(B, t) = N(B, s)$. Pour un tel s il existe $M, P \in D_K$, M s-dominant, tels que $B = MP$ et $N(M, s) = N(B, s)$.

On pose $Q = LM$. On a donc $A = QP$. Par ailleurs $\deg B = N(A, t)$, $\deg M = N(B, s) = n(B, t) = n(A, t)$, et donc $\deg P = N(A, t) - n(A, t)$.

Comme $t < s$, $N(M, t) = n(M, t) = \deg M$, d'où

$$N(P, t) = N(B, t) - N(M, t) = N(A, t) - n(A, t)$$
$$n(P, t) = n(B, t) - n(M, t) = 0$$

ce qui montre que P est t-extrémal.

2) Se démontre de même et 3) se démontre comme le 4) du théorème 2.4.

2.7. Notons $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation de K. Supposons que $\alpha(\partial) > 0$. Alors la dérivation envoie $\mathcal{O}$ dans son idéal maximal et par passage au quotient induit la dérivation triviale sur le corps de restes k de K.

Nous noterons $\mathcal{O}[\partial]$ l'anneau des éléments de D_K dont les coefficients sont dans $\mathcal{O}$. Soit $A = \Sigma a_i \partial^i \in \mathcal{O}[\partial]$ et $\bar{A} = \Sigma \bar{a}_i \partial^i \in k[\partial]$ son image. Supposons qu'on ait une factorisation $\bar{A} = Q^* P^*$ dans $k[\partial]$, nous cherchons si cette factorisation se relève dans $\mathcal{O}[\partial]$. La démonstration classique de ce lemme de Hensel dans le cas commutatif (cf. par exemple [Am] 2.5) ne se généralise pas au cas des opérateurs différentiels. Nous allons donc suivre la méthode de [Dw] § 6 qui interprète l'équation $A = QP$ en un système d'équations différentielles non linéaires portant sur les coefficients de Q et P. Nous allons donc commencer par étudier à quelles conditions un système d'équations différentielles non linéaires ayant une solution dans le corps résiduel a une solution dans $\mathcal{O}$.

Soit un système différentiel non linéaire de m équations à m inconnues à coefficients dans $\mathcal{O}$. Précisément posant

$$X = (X_1, \ldots, X_m),\ Y_i = (Y_{i,1}, \ldots, Y_{i,m})\ 1 \leqslant i \leqslant s$$

et $X^\mu = X_1^{\mu_1} \ldots X_m^{\mu_m}$ pour $\mu \in \mathbf{N}^m$, soit

$$F(X, Y_1, \ldots, Y_s) = \sum_{\mu, (v_i)} C_{\mu, (v_i)} X^{\mu} Y_1^{v_1} \ldots Y_s^{v_s} \tag{2.7.1}$$

avec μ, $v_i \in \mathbf{N}^m$, la somme étant finie, et avec $C_{\mu, (v_i)} \in \mathcal{O}^m$.

Nous cherchons une solution dans $\mathcal{O}^m$ de l'équation

$$G(X) =_{\text{déf}} F\big(X, \partial(X), \ldots, \partial^s(X)\big) = 0 . \tag{2.7.2}$$

Pour $u \in \mathcal{O}$ nous appelons application tangente à G en u, l'application L_u de $\mathcal{O}^m$ dans lui-même définie par

$$L_u(z) = L_u(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{i=1}^{m} z_i \frac{\partial F}{\partial X_i}(u, \partial(u), \ldots) \tag{2.7.3}$$

$$+ \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{m} \partial^j z_i \frac{\partial F}{\partial Y_{j,i}}(u, \partial(u), \ldots) .$$

Nous écrirons

$$L_u(z) = A_u(z) + B_u\big(\partial(z)\big)$$

où $A_u(z) = \sum_{i=1}^{m} z_i \dfrac{\partial F}{\partial X_i}(u, \ldots)$. Nous utiliserons la même notation A_u pour désigner l'application de $\mathcal{O}^m$ dans lui-même et la matrice qui lui est associée.

Par passage au quotient l'équation (2.7.2) devient

$$\bar{G}(X) = \sum_{\mu} \bar{C}_{\mu, (0)} X^{\mu} = 0 \tag{2.7.4}$$

dont l'application tangente en $u^* \in k^m$ est $\bar{A}_{u^*}$ définie par

$$\bar{A}_{u^*}(z) = \sum_{i=1}^{m} z_i \frac{\partial \bar{G}}{\partial X_i}(u^*) . \tag{2.7.5}$$

2.8. Proposition. *Soit* $\alpha > 0$. *Soient* F *et* G *définies par les formules* (2.7.1) *et* (2.7.2). *Soit* $u^* \in k^m$ *une solution de l'équation réduite* $\bar{G}(u^*) = 0$. *Supposons que l'application tangente réduite* $\bar{A}_{u^*}$ *est inversible dans* k^m. *Alors* u^* *se relève de facon unique en une solution* $u \in \mathcal{O}^m$ *de l'équation* $G(u) = 0$.

Démonstration. Soit η un relèvement de u^* dns $\mathcal{O}^m$. Considérons le développement taylorien de G autour de η

$$G(\eta + X) = G(\eta) + A_\eta(X) + B_\eta\big(\partial(X)\big) + Q_\eta(X) . \tag{2.8.1}$$

On a $\bar{A}_\eta = A_{u*}$. D'après notre hypothèse $\det(\bar{A}_{u*}) \neq 0$, ceci signifie que $\det(A_\eta)$ est une unité de $\mathcal{O}$ donc que A_η est inversible dans $GL_m(\mathcal{O})$.

Posons $u = \eta + w$. Alors l'équation $G(u) = 0$ équivaut à

$$(2.8.2) \qquad w = - A_\eta^{-1}\big(G(\eta) + B_\eta(\partial(w)) + Q_\eta(w)\big) =_{\text{déf}} \Phi(w)\,.$$

On munit K^m de la norme (exprimée sous forme additive) définie pour $X = (x_1, \ldots, x_m) \in K^m$ par $v(X) = \inf_i v(x_i)$.

Notons que, comme Q_n ne contient que des termes au moins quadratiques en la variable et ses dérivées on a pour tous $z, y \in \mathcal{O}^m$

$$v(Q_\eta(z)) \geqslant 2v(z)$$
$$v(Q_\eta(z) - Q_\eta(y)) \geqslant v(z-y) + \inf\big(v(y), v(z)\big)\,.$$

Comme $\overline{G(\eta)} = \bar{G}(u^*) = 0$, on a $v\big(G(\eta)\big) > 0$. Choisissons λ réel tel que

$$0 < \lambda < \inf\big(\alpha, v(G(\eta))\big)\,.$$

Soit $U = \{z \in \mathcal{O}^m ; v(z) \geqslant \lambda\}$. Nous allons montrer que Φ est une contraction de U. Puisque U est complet il en résultera par le théorème du point fixe que l'équation (2.7.2) possède une solution dans U et donc que l'équation (2.7.2) possède une solution u qui est un relèvement de u^*.

i) Φ envoie U dans lui-même. En effet on a pour $v(z) \geqslant \lambda$

$$v(\Phi(z)) \geqslant \inf\big(v(G(\eta)),\ v(B_\eta(\partial z)),\ v(Q_\eta(z)) \geqslant \inf\big(v(G(\eta)),\ v(z) + \alpha\,,\ 2v(z)\big) \geqslant \lambda\,.$$

ii) Φ est une contraction.

$$v\big(\Phi(z) - \Phi(y)\big) \geqslant \inf\big(v(z-y) + \alpha, v(z-\eta) + \inf\big(v(z), v(y)\big)\big)$$
$$\geqslant v(z-y) + \lambda\,.$$

Montrons l'unicité du relèvement. Soit u_1 un deuxième relèvement de u* solution de l'équation (2.7.2). On a $v(u_1 - \eta) > 0$. Il est toujours possible de choisir λ de sorte que $0 < \lambda < v(u_1 - \eta)$. Alors $u_1 - \eta \in U$ et vérifie (2.8.2). En vertu de l'unicité du point fixe d'une contraction on a $u_1 - \eta = u - \eta$ d'où $u_1 = u$.

2.9. Théorème. *Soit* $\alpha > 0$. *Soit* $A \in \mathcal{O}[X]$ *de degré* $m + n$. *Supposons que son image* $\bar{A}$ *dans* $k[X]$ *se factorise sous la forme*

$$\bar{A} = Q^* P^* \tag{2.9.1}$$

où P^* est unitaire de degré n, Q^* et P^* étant premiers entre eux.

1) *Il existe un relèvement unique Q, P de Q^*, P^* avec* $\deg Q = m$, $\deg P = n$, *P unitaire, tel que*

$$A(\partial) = Q(\partial) P(\partial)\,. \tag{2.9.2}$$

2) *Il existe également un unique relèvement Q', P' vérifiant les mêmes hypothèses que Q et P tel que*

$$A(\partial) = P'(\partial)\, Q'(\partial)\,. \tag{2.9.3}$$

3) *On a $D/DP \simeq D/DP'$, $D/DQ \simeq D/DQ'$, $D/DA \simeq D/DP \oplus D/DQ$.*

Démonstration. L'équation (2.9.2) peut s'interpréter comme un système de $m + n$ équations différentielles portant sur les coefficients (d'ordre $\leqslant m - 1$ et d'ordre $\leqslant n - 1$ respectivement) de Q et de P, et (2.9.1) représente alors le système réduit. Si $\mathscr{P}_m$ désigne l'espace des polynômes à coefficients dans k de degré $\leqslant m$, l'application tangente réduite $\bar{A}_{Q^*, P^*}$ s'interprète comme l'application de $\mathscr{P}_{m-1} \times \mathscr{P}_{n-1}$ dans $\mathscr{P}_{m+n-1}$

$$(U, V) \mapsto UP^* + Q^* V,$$

et cette application est inversible si et seulement si P^* et Q^* sont premiers entre eux (théorème de Bezout, cf. [Ro] § 1.3).

2.10. Dans le cas $\alpha = 0$, la démonstration précédente n'est plus valable (car l'application $z \mapsto B_\eta(\partial z)$ n'est plus forcément une contraction). Il n'existe pas de démonstration valable pour tous les corps avec dérivation donnant un résultat du type du théorème 2.9 pour $\alpha = 0$. On donnera deux exemples de cette situation: l'un dans le cas $K = k((x))$ (cf. 2.5.1), l'autre dans le cas où K est le corps considéré à l'exemple 2.5.2.

Nous allons établir maintenant un lemme de Hensel du type précédent dans le cas $K = k((x))$ muni de la dérivation $\partial = x \dfrac{d}{dx}$ (on a alors $\alpha(\partial) = 0$). Nous allons d'abord donner une nouvelle version du théorème 2.8. Soient F, G et L_u définies par les relations (2.7.1), (2.7.2) et (2.7.3). Nous allons maintenant interpréter L_u comme une $m \times m$ matrice à coefficients dans $\mathcal{O}\,[\partial]$.

Pour $u^* \in k^m$ on définit $\bar{L}_{u^*}$ comme étant la $m \times m$ matrice à coefficients dans $k[\partial]$ réduite de L_{u^*}. Le *i-j*-coefficient de $\bar{L}_{u^*}$ est donc

$$\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial X_j}(u^*, 0, 0 \ldots) + \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial Y_{l,j}}(u^*, 0, 0 \ldots)\, \partial^l .$$

Notons que par passage au quotient, ∂ induit la dérivation triviale sur le corps résiduel k, il faut donc distinguer entre un opérateur différentiel à coefficients dans k et l'application qu'il définit dans k. Par contre les opérateurs différentiels à coefficients dans k commutent entre eux, on peut donc définir $\det(\bar{L}_{u^*}) \in k[\partial]$.

2.11. LEMME. *Soient* $\pi \in k[X]$ *et* s_0 *entier tels que* $\pi(s) \neq 0$ *pour tout* $s \geqslant s_0$. *Alors* $\pi(\partial)$ *réalise une bijection isométrique de la boule* $\{a \in k((x));\ v(a) \geqslant s_0\}$ *sur elle-même.*

Démonstration :

C'est évident puisque $\pi(\partial)\left(\sum_{s \geqslant s_0} a_s x^s\right) = \sum_{s \geqslant s_0} \pi(s)\, a_s x^s$.

2.12. PROPOSITION. *Soit* $K = k((x))$ *et* $\partial = x\dfrac{d}{dx}$. *Soient* F *et* G *définies par les formules* (2.7.1) *et* (2.7.2). *Soit* $\eta \in \mathcal{O}_K^m$ *et posons* $\pi(\partial)$ $\det(\bar{L}_\eta) \in k[\partial]$. *Soit* s_0 *entier* >0 *tel que pour tout entier* $s \geqslant s_0$, $\pi(s) \neq 0$. *Si l'on a* $v(G(\eta)) \geqslant s_0$, *il existe un unique* $u \in \mathcal{O}^m$ *solution de l'équation* $G(u) = 0$ *tel que* $v(u - \eta) \geqslant s_0$.

En particulier soit $u^* \in k^m$ *solution de* $\bar{G}(u^*) = 0$. *Soit* $\pi(\partial) =$ $\det(\bar{L}_{u^*}) \in k[\partial]$. *Si* π *ne possède pas de racines entières* >0, *il existe un unique relèvement* u *de* u^* *solution de l'équation* $G(u) = 0$.

Démonstration : Notre hypothèse implique en particulier que $\pi(\partial)$ n'est pas le polynôme nul. Il existe donc une $m \times m$ matrice M à coefficients dans $k[\partial]$ telle que

$$M\bar{L}_\eta = \pi(\partial)\, I$$

où I désigne la $m \times m$ matrice identité.

On a donc

$$ML_\eta - \pi(\partial)\, I = xN$$

où N est une matrice à coefficients dans $\mathcal{O}[\partial]$ (ici $\mathcal{O} = k[[x]]$ et x est l'uniformisante canonique de K).

Comme dans la proposition 2.8 on considère le développement taylorien (2.8.1) de G, et l'on voit que l'équation $G(u) = 0$ peut s'écrire, avec $w = u - \eta$,

$$\text{(2.12.1)} \qquad \pi(\partial)\, w = -\big(MG(\eta) + xN(w) + MQ_\eta(w)\big).$$

Soit $U = \{z \in \mathcal{O}^m ; v(z-\eta) \geqslant s_0\}$. Il est clair que si $w \in U$ le second membre de (2.12.1) appartient aussi à U, et donc si l'on cherche une solution de 2.12.1 dans U, il est équivalent d'écrire (puisque d'après le lemme 2.11 $\pi(\partial)$ est inversible sur U),

$$\text{(2.12.2)} \qquad w = \Phi(w) =_{\text{déf}} -\pi(\partial)^{-1}\big(MG(\eta) + xN(w) + MQ_\eta(w)\big).$$

On vérifie facilement comme dans la proposition 2.5 que Φ est une contraction de U, ce qui montre que l'équation (2.12.1) possède une solution unique.

Pour la deuxième partie de la proposition il suffit de prendre un relèvement η quelconque de u^* (par exemple $\eta = u^*$) et de prendre $s_0 = 1$.

2.13. THÉORÈME. *Soit* $K = k((x))$ *et* $\partial = x\dfrac{d}{dx}$. *Soit* $A \in \mathcal{O}[X]$ *de degré* $m + n$. *Supposons que son image* $\bar{A}$ *dans* $k[X]$ *se factorise sous la forme*

$$\text{(2.13.1)} \qquad \bar{A} = Q^* P^*$$

où P^* *est unitaire de degré* n.

1) *Si* $Q^*(X+s)$ *est premier à* $P^*(X)$ *pour tout entier* $s > 0$, *il existe un relèvement unique* Q', P' *de* Q^*, P^* *avec* $\deg Q = m$, $\deg P = n$, P *unitaire, tel que*

$$\text{(2.13.2)} \qquad A(\partial) = Q(\partial)\, P(\partial).$$

2) *Si* $P^*(X+s)$ *est premier à* $Q^*(X)$ *pour tout entier* $s > 0$, *il existe un relèvement unique* Q', P' *de* Q^*, P^* *avec* $\deg Q' = m$, $\deg P' = n$, P' *unitaire, tel que*

$$A(\partial) = P'(\partial)\, Q'(\partial).$$

3) *Si* $P^*(X+s)$ *est premier à* $Q^*(X)$ *pour tout* $s \in \mathbf{Z}$, P, Q, P', Q' *étant les polynômes différentiel définis précédemment on a*

$$D/DP \simeq D/DP', \quad D/DQ \simeq D/DQ', \quad D/DA \simeq D/DP \oplus D/DQ.$$

4) *Soit* s_0 *entier* >0 *tel que pour tout entier* $s \geqslant s_0$ $Q^*(X+s)$ *soit premier à* $P^*(X)$. *S'il existe un relèvement* Q_1, P_1 *de* Q^*, P^* *avec* $\deg Q_1 = m$, $\deg P_1 = n$, P_1 *unitaire et* $v(A(\partial) - Q_1(\partial)P_1(\partial), 0) \geqslant s_0$, *alors il existe* $Q, P \in D$ *uniques avec* $\deg Q = m$, $\deg P = n$, P *unitaire*, $v(P-P_1, 0) \geqslant s_0$, $v(Q-Q_1, 0) \geqslant s_0$ *et* $A = QP$.

On a un énoncé similaire pour une factorisation $A = P'Q'$.

Les théorèmes 2.9 et 2.13 sont les équivalents du classique lemme de décompositions pour les modules différentiels dont on trouvera un énoncé précis dans [Le] § 2.

Démonstration :

1) L'équation (2.13.2) peut s'interpréter comme un système de $m + n$ équations différentielles portant sur les coefficients (d'ordre $\leqslant m - 1$ et d'ordre $\leqslant n - 1$ respectivement) de Q et P, et (2.13.1) représente le système réduit. Il s'agit de montrer que le polynôme $\pi(\partial)$, déterminant de $\bar{L}_{Q^*, P^*}$ ne s'annule pas sur les entiers >0.

Or, si l'on note $\mathscr{P}_m$ l'espace des polynômes différentiels de degré $\leqslant m$, à coefficients dans $k((x))$, l'application tangente L_{Q^*, P^*} s'interprète comme l'application de $\mathscr{P}_{m-1} \times \mathscr{P}_{n-1}$ dans $\mathscr{P}_{m+n-1}$

$$(U(\partial), V(\partial)) \mapsto U(\partial)P^*(\partial) + Q^*(\partial)V(\partial).$$

Si

$$P^* = \sum_{i=0}^{n} p_i \partial^i, \quad Q^* = \sum_{i=0}^{m} q_i \partial^i, \quad U = \sum_{i=0}^{m-1} u_i \partial^i, \quad V = \sum_{i=0}^{n-1} v_i \partial^i,$$

on a

$$UP^* + Q^*V = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n} u_i p_j \partial^{i+j} + \sum_{j=0}^{m} q_i \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} \partial^l(v_j)\, \partial^{i+j-l}.$$

Nous n'expliciterons pas la matrice de L_{P^*, Q^*} (qui a ses coefficients dans $k[\partial]$) mais nous observerons que si dans cette matrice nous faisons $\partial = 0$ alors on obtient la matrice de l'application

$$\begin{aligned}(U(X), V(X)) \mapsto & \; U(X)P^*(X) + Q^*(X)V(X) \\ = & \; U(X)P^*(X) + V(X)Q^*(X)\end{aligned}$$

dont on a observé dans la démonstration du théorème 2.9 qu'elle était inversible si et seulement si P^* et Q^* étaient premiers entre eux.

En résumé $\pi(0) \neq 0$ si et seulement si $P^*(X)$ *et* $Q^*(X)$ sont premiers entre eux.

De la relation

$$(\partial + s)^i v = \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} (\partial + s)^l (v)\, \partial^{i-l}$$

valable pour tout $v \in k((x))$, tout entier $i \geqslant 0$ et s entier, on voit que la matrice $L_{P^*(X),\, Q^*(X+s)}(\partial)$ de l'application

$$\big(U(\partial), V(\partial)\big) \mapsto U(\partial)\, P^*(\partial) + Q^*(\partial + s)\, V(\partial) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{n} u_i p_j \partial^{i+j}$$
$$+ \sum_{i=0}^{n-1} q_i \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} (\partial + s)^l (v_j)\, \partial^{i+j-l}$$

est $L_{P^*(X),\, Q^*(X)}(\partial + s)$.

Par conséquent d'après ce qu'on vient de voir, $\pi(s) \neq 0$ si et seulement si $P^*(X)$ et $Q^*(X+s)$ sont premiers entre eux.

Il suffit alors d'appliquer la proposition 2.12.

2) se démontre de même.

3) Supposons qu'on ait $P_1 Q' = Q_1 P$ avec $\deg P_1 < \deg P$. Si $P_1 \neq 0$ (et donc $Q_1 \neq 0$) on peut se ramener au cas $v(P_1, 0) = v(Q_1, 0) = 0$. En passant au corps résiduel on obtient $\bar{P}_1 Q^* = \bar{Q}_1 P^*$ avec $\deg \bar{P}_1 < \deg P^*$ et $\bar{P}_1 \neq 0$ $\bar{Q}_1 \neq 0$ ce qui contredit l'hypothèse que Q^* et P^* sont premiers entre eux.

On applique alors le lemme 2.2.

4) Se démontre comme 1).

2.14. *Applications.*

2.14.1. Soit $A \in D$ avec $v(A, 0) = 0$; on a

$$\deg \bar{A} = N(A, 0)\,.$$

Si A n'est pas fuchsien, c'est-à-dire si $\deg \bar{A} < \deg A$, en appliquant le théorème 2.12 avec $P^* = \bar{A}$ et $Q^* = 1$, on obtient une factorisation de A en un opérateur fuchsien et un opérateur totalement irrégulier (cf. 2.5.1), ce qui nous redonne une démonstration différente du résultat 2.5.1.

2.14.2. Supposons maintenant que k est algébriquement clos de caractéristique 0.

Soit $A \in D$ avec $v(A, 0) = 0$, de degré n et supposons A fuchsien. Alors $\bar{A}$ (qui est le polynôme indiciel de A) est de degré n. Notons $\lambda_1 \dots \lambda_n$ ses racines de telle sorte que si pour $i < j$ $\lambda_i - \lambda_j$ est entier, alors cet entier est positif. Appliquons le théorème 2.12 avec $P^*(X) = (X - \lambda_1)$ et $Q^* = c(X - \lambda_n) \dots (X - \lambda_2)$. On aura alors une factorisation $A = A_1 P_1$ où P_1 relève P^* et A_1 relève Q^*. Par induction sur le degré de A on voit que l'on al a factorisation $A = a P_n \dots P_1$, avec $P_i = \partial - \eta_i$, et $\eta_i - \lambda_i \in x\, k\, [[x]]$.

On peut retrouver ce résultat de façon différente. Il est bien connu (cf. [In] § 16.1) que l'équation $Au = 0$ possède une solution formelle $u = x^{\lambda_1} v$ avec $v \in k\, [[x]]$. Alors A se factorise sous la forme $A = A_1 P_1$ avec

$$P_1 = \partial - \frac{\partial(u)}{u} \text{ et l'on a } \frac{\partial(u)}{u} = \lambda_1 + \frac{\partial(v)}{v} \text{ avec } \frac{\partial(v)}{v} \in x\, k\, [[x]].$$

2.15. Nous utilisons les notations du paragraphe 2.5.2. Si $\bar{L}$ désigne le corps résiduel de L, alors le corps résiduel de E s'identifie à $\bar{L}(X)$. Par passage au quotient la dérivation $\partial = \dfrac{d}{dx}$ sur E donne la dérivation $\dfrac{d}{dx}$ sur $\bar{L}(X)$ qui n'est pas triviale. Nous noterons, pour $m \in N$, $\mathscr{P}_m$ l'espace des polynômes différentiels de degré $\leqslant m$ à coefficients dans $\bar{L}(X)$. Nous notons encore $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation de E.

THÉORÈME. *Soit* $A \in \mathcal{O}\,[\partial]$ *de degré* $m + n$. *Supposons que son image* $\bar{A}$ *dans* $\bar{L}(X)\,[\partial]$ *se factorise sous la forme*

$$\bar{A} = Q^* P^*$$

où P^* *est unitaire de degré* n.

Alors si l'application

$$(U, V) \mapsto UP^* + Q^* V$$

de $\mathscr{P}_{m-1} \times \mathscr{P}_{n-1}$ *dans* $\mathscr{P}_{m+n-1}$ *est injective, il existe un relèvement unique* Q, P *de* $Q^* P^*$ *avec* $\deg Q = m$, $\deg P = n$, P *unitaire, tel que* $A = QP$.

On trouvera la démonstration dans [Dw] § 6. On montre de plus que si les coefficients de A sont des éléments analytiques admissibles (cf. § 2.5.3) alors les coefficients de P et Q le sont également.

3. Application aux points singuliers irréguliers

Dans ce paragraphe nous supposons que *la valuation de* K *est discrète* et que *le corps résiduel est de caractéristique* 0.

L'exemple le plus important est celui où $K = k((x))$ muni de sa valuation x-adique avec k de caractéristique 0.

Donnons un autre exemple. Soit L un corps valué de caractéristique 0 muni d'une dérivation δ, par exemple $L = k(y)$ ou $L = k((y))$ avec k de caractéristique 0 et $\delta = \dfrac{d}{dy}$. Prenons $K = L((x))$ muni de sa valuation x-adique. On mettra sur K l'unique dérivation continue ∂ telle que $\partial(a) = \delta(a)$ pour $a \in L$ et $\partial(x) = 1$. (Nous ignorons si cet exemple présente de l'intérêt).

3.1. Lemme. *Soit* K *valué complet muni d'une valuation discrète et d'une dérivation* ∂ *continue, ayant un corps résiduel de caractéristique* 0. *Soit* L *une extension algébrique de* K. *Alors la dérivation s'étend d'une façon unique à* L *et l'on a*

$$\alpha_L(\partial) = \alpha_K(\partial)\,. \tag{3.1.1}$$

Rappelons que la valuation de K s'étend aussi de façon unique à L, car K est complet.

L'intérêt de ce lemme est de montrer que si $P \in D_K$ est fuchsien en tant qu'élément de D_L il est également fuchsien en tant qu'élément de D_K.

Démonstration. Il est bien connu que la dérivation s'étend de façon unique. Tout ce qu'il faut montrer est la relation (3.1.1).

Si $P \in K[X]$, $P = \Sigma\, a_i X^i$, on écrira $P' = \Sigma\, i\, a_i X^{i-1}$ et $\partial(P) = \Sigma\, \partial(a_i) X^i$.

Par récurrence on peut se ramener au cas où il n'y a pas d'extension algébrique de K entre K et L. Soit $n = [L:K]$. Soit $u \in L \setminus K$. Comme la valuation de K est discrète, il existe $a \in K$ tel que $v(u-a) = \sup_{b \in K} v(a-b)$. Posons $w = u - a$.

Si L n'est pas ramifié sur K, il existe $b \in K$ tel que $w = bz$ et $v(z) = 0$. Soient $\bar{L}$ et $\bar{K}$ les corps résiduels de L et K. Par construction de z on a $\bar{L} = \bar{K}(z)$. De plus $[\bar{L}:\bar{K}] = [L:K]$. Soit $P \in K[X]$ le polynôme minimal unitaire de z. Alors P a ses coefficients dans l'anneau de valuation de K.

Comme $\bar{P}(\bar{z}) = 0$, et que $\bar{P}$ n'est pas le polynôme nul, on en déduit aussitôt que $\bar{P}$ est de degré n et est irréductible sur $\bar{K}$. Comme $\bar{K}$ est de caractéristique nulle, $\bar{P}$ est premier avec $\bar{P}'$, et donc $\overline{P'(z)} = \bar{P}'(\bar{z}) \neq 0$, soit $v(P'(z)) = 0$. Par ailleurs si $P = \Sigma\, a_i X^i$, on a clairement $v(\partial(P)(z)) \geqslant \inf(v(a_i) + \alpha) \geqslant \alpha$. Comme

$$\partial(z) P'(z) + \partial(P)(z) = 0$$

on en déduit $v(\partial(z)) \geqslant v(\partial(P)(z)) - v(P'(z)) \geqslant \alpha = \alpha + v(z)$. Comme

$$\partial(w)/w = \partial(b)/b + \partial(z)/z$$

on a alors

$$v(\partial(w)) - v(w) \geqslant \inf(v(\partial(b)) - v(b), v(\partial(z)) - v(z)) \geqslant \alpha$$

et enfin, puisque $v(u) = v(a) \leqslant v(w)$ et $\partial(u)/u = \partial(a)/u + \partial(w)/u$

$$\begin{aligned} v(\partial(u)) - v(u) &\geqslant \inf(v(\partial(a)) - v(u), v(\partial(w)) - v(u)) \\ &\geqslant \inf(v(\partial(a)) - v(a), v(\partial(w)) - v(w)) \geqslant \alpha\,. \end{aligned}$$

Si L est ramifiée, alors L est totalement ramifié et $\Gamma(L) = \frac{1}{n}\Gamma(K)$ où $\Gamma(L)$ désigne le groupe des valeurs de L. Par construction de w, $\Gamma(L)$ est engendré sur $\Gamma(K)$ par $v(w)$, ce qui entraîne que, $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in K[X]$ étant le polynôme minimal unitaire de w, on a

$$nv(w) = v(a_o) < v(a_i) + iv(w) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1\,.$$

Mais alors, puisque $wP'(w) = nw^n + \sum_{i=1}^{n-1} i\, a_i w^i$, on a

$$v(wP'(w)) = nv(w) = v(a_o)$$

car $v(n) = 0$, $\bar{K}$ étant de caractéristique 0. Par ailleurs

$$v(\partial(P)(w)) \geqslant \inf_{0 \leqq i \leqq n-1} (v(a_i) + \alpha + iv(w)) = v(a_o) + \alpha\,.$$

Comme $\partial(w) P'(w) + \partial(P)(w) = 0$, on en déduit

$$v(\partial(w)) - v(w) = v(\partial(P)(w)) - v(wP'(w)) \geqslant \alpha\,.$$

3.2. THÉORÈME. *On suppose que la valuation de* K *est discrète et le corps résiduel de* K *de caractéristique* 0. *Soit* $P \in D_K$, $P \neq 0$. *Il existe une extension finie* L *de* K, *des* $\eta_i \in L$ $(1 \leqslant i \leqslant q)$ *et des* $P_i \in D_L$ *fuchsiens tels qu'on ait*

1) $P(\partial) = P_1(\partial - \eta_1) \dots P_q(\partial - \eta_q)$

2) $D_L/D_L P(\partial) \simeq \bigoplus D_L/D_L P_i(\partial - \eta_i)$.

3) *(Unicité). Dans la décomposition précédente on peut supposer que les* P_i *ne sont pas constants et que* $v(\eta_i - \eta_j) < \alpha$ *pour* $i \neq j$. *Alors, si l'on a, dans une même extension* L *une deuxième décomposition* $P(\partial) = P'_1(\partial - \xi_1) \dots P'_r(\partial - \xi_r)$ *où les* P'_i, ξ_i *vérifient les mêmes conditions que* P_i, η_i, *on a* $r = q$ *et il existe une permutation* σ *de l'ensemble* $[1, 2, \dots, q]$ *telle que* $v(\eta_i - \xi_{\sigma(i)}) \geqslant \alpha$ *et*

$$D_L/D_L P_i(\partial - \eta_i) \simeq D_L/D_L P'_{\sigma(i)}(\partial - \xi_{\sigma(i)}) \qquad 1 \leqslant i \leqslant q\,.$$

Démonstration :

1) et 2) Notons $t_0 = \alpha$ et t_i, $i = 1, \dots$, les valeurs exceptionnelles $< \alpha$, associées à P. Soit x une uniformisante de K. On appelle rang de Poincaré-Katz $r(P) = (\alpha - \inf_{i \geq 0} t_i)/v(x)$. Nous allons démontrer le théorème par une double récurrence sur $(\deg P, r(P))$ ordonnés par l'ordre lexicographique; la récurrence commence soit à $\deg P = 1$ où le résultat est évident. soit à $r(P) = 0$ où il est aussi évident puisque cela signifie que P est fuchsien. (La récurrence ne porte sur $r(P)$ que pour les valeurs entières de $r(P)$).

D'après le théorème 2.3 et le corollaire 2.5 on peut se ramener au cas où P est t_1-extrémal avec $t_1 < \alpha$ (et alors $r(P) = (\alpha - t_1)/v(x)$). Deux cas peuvent se présenter.

Cas 1. t_1 n'appartient pas au groupe de valuation de K (c'est-à-dire $r(P)$ n'est pas entier). Soit L l'extension de K déterminée par le polynôme $P(X)$ et soit $\eta \in L$ une racine de $P(X)$. On a $t_1 = v(\eta) = \sup_{z \in K} v(\eta - z)$. Comme le corps résiduel de K est de caractéristique nulle, d'après Ax [Ax], il existe un conjugué η' de η sur K avec $v(\eta' - \eta) = t_1$. Soit $R(X) = P(X + \eta)$. Le polynôme R s'annulant en 0 on a $n(R, t_1) > 0$; comme $\eta' - \eta$ est racine de R et $v(\eta' - \eta) = t_1$, on a $N(R, t_1) - n(R, t_1) > 0$. Il résulte alors de la proposition 1.11 que l'on a $n(P(\partial + \eta), t_1) = n(R, t_1) > 0$ et $N(P(\partial + \eta), t_1) - n(P(\partial + \eta), t_1) = N(R, t_1) - n(R, \eta) > 0$; le corollaire 2.5 nous permet alors d'abaisser le degré de P.

Cas 2. t_1 appartient au groupe de valuation de K (c'est-à-dire $r(P)$ est entier). Soit L_1 l'extension de K déterminée par le polynôme $P(X)$ et soit L l'extension maximale non ramifiée de K dans L_1. Si ξ est une racine de $P(X)$ (appartenant à L_1) il existe $\eta \in L$ tel que $v(\xi-\eta) > v(\xi) = v(\eta) = t_1$. Posons $R(X) = P(X+\eta)$. On a alors $n(R, t_1) > 0$ et d'après la proposition 1.11 $n(P(\partial+\eta), t_1) > 0$. Si $n(P(\partial+\eta), t_1) < N(P(\partial+\eta), t_1)$ on peut abaisser le degré de P grâce au corollaire 2.5. Si $n(P(\partial+\eta), t_1) = N(P(\partial+\eta), t_1)$ alors t_1 n'est pas exceptionnel pour $P(\partial+\eta)$ et l'on a $r(P(\partial+\eta)) < r(P(\partial))$. L'hypothèse de récurrence nous permet alors de conclure.

3) Commençons par quelques remarques qui découlent directement des définitions et de la proposition 1.11. Soit $P \in D_K$, fuchsien (c'est-à-dire α-dominant). Si $v(\eta) \geqslant \alpha$ alors $P(\partial+\eta)$ est également fuchsien (car $P(\partial)$ et $P(\partial+\eta)$ ont même fonction de valuation pour $t \leqslant \alpha$). Si $v(\eta) < \alpha$, alors $P(\partial+\eta)$ est $v(\eta)$-extrémal (en effet $P(X)$ α-dominant signifie que toutes les racines de $P(X)$ dans la clôture algébrique de K sont de valuation $\geqslant \alpha$, alors $R(X) = P(X+\eta)$ a toutes ses racines de valuation $v(\eta)$ ce qui entraîne que R est $v(\eta)$-extrémal et donc $P(\partial+\eta)$ aussi d'après 1.12).

Soit alors P le polynôme de l'énoncé et $P(\partial) = P_1(\partial-\eta_1) \dots P_q(\partial-\eta_q)$ une de ses décompositions comme en 1). Soit $\eta \in L$. Si $v(\eta-\eta_i) \geqslant \alpha$, $P_i(\partial+\eta-\eta_i)$ est fuchsien et $N(P_i(\partial+\eta-\eta_i), \alpha) = \deg P_i$. Si $v(\eta-\eta_i) < \alpha$, $P_i(\partial+\eta-\eta_i)$ est $v(\eta-\eta_i)$-extrémal et $N(P_i(\partial+\eta-\eta_i), \alpha) = 0$. D'après le théorème 1.6 on a alors $N(P(\partial+\eta), \alpha) = \sum_{v(\eta-\eta_i) \geqq \alpha} \deg P_i$.

Démontrons 3). Il est clair que dans la décomposition 1) on peut supposer les P_i non constants. Pour montrer que, l'on peut supposer $v(\eta_i-\eta_j) < \alpha$ pour $i \neq j$ on va procéder par induction sur le degré de P. D'après 1) il existe $\eta \in L$ (par exemple $\eta = \eta_1$) tel que $N(P(\partial+\eta), \alpha) \neq 0$. D'après le théorème 2.4 on a une factorisation $P(\partial+\eta) = P'(\partial)\, Q(\partial+\eta)$ avec P' fuchsien et $N(Q(\partial+\eta), \alpha) = 0$, et de plus on a

$$D_L/D_L P(\partial) \simeq D_L/D_L P_1'(\partial+\eta_1) \oplus D_L/D_L\, Q(\partial)$$

$\deg Q < \deg P$. Si maintenant dans la factorisation de Q,

$$Q(\partial) = Q_1(\partial-\xi_1) \dots Q_r(\partial-\xi_r)$$

avec $v(\xi_i-\xi_j) < \alpha$ pour $i \neq j$ on avait un indice i pour lequel $v(\xi_i-\eta) \geqslant \alpha$, alors on aurait $N(Q(\partial+\eta), \alpha) = N(Q(\partial+\xi_i), \alpha) = \deg Q_i > 0$ ce qui donne une contradiction.

Considérons maintenant une deuxième décomposition $P(\partial) = P'_1(\partial-\xi_1) \dots P'_r(\partial-\xi_r)$. Alors $N(P(\partial+\xi_j), \alpha) = \deg P'_j$. S'il n'y avait aucun indice i tel que $v(\xi_j-\eta_i) \geqslant \alpha$ on aurait, puisque $P(\partial+\xi_j) = P_1(\partial+\xi_j-\eta_1) \dots P_q(\partial+\xi_1-\eta_q)$, $N(P(\partial+\xi_j), \alpha) = 0$ ce qui est une contradiction. Il y a donc un η_i avec $v(\xi_j-\eta_i) \geqslant \alpha$ et cet η_i est évidemment unique. Par suite de l'unicité du facteur fuchsien établie au théorème 2.4 on a $D_L/D_L P'_j(\partial) \simeq D_L/D_L P_i(\partial+\xi_j-\eta_i)$ et donc $D_L/D_L P_j(\partial-\xi_j) \simeq D_L/D_L P_i(\partial-\eta_i)$.

3.3. *Perturbations.*

Nous nous limitons désormais au cas $K = k((x))$ avec k de caractéristique 0. Pour simplifier nous supposerons k algébriquement clos. Nous prenons la dérivation $\partial = x \dfrac{d}{dx}$. Alors $\alpha = 0$.

Si P est fuchsien et unitaire, alors P a ses coefficients dans l'anneau de valuation $\mathcal{O}$ de K. Le polynôme réduit $\bar{P}$ vu comme élément de $k[X]$ s'appelle le polynôme indiciel. On a bien sûr $\deg \bar{P} = \deg P$.

Soit $P \in D_K$. Soit $N = N(P, 0)$. Alors $v(a_N^{-1} P, 0) = 0$, c'est-à-dire $a_N^{-1} P \in \mathcal{O}[\partial]$, par réduction on voit que $\overline{a_N^{-1} P}$ est le polynôme indiciel de son facteur fuchsien (rappelons qu'on peut factoriser P à gauche ou droite, les polynômes différentiels ainsi obtenus ne sont pas les mêmes mais ils ont même polynôme indiciel). Il en résulte immédiatement que si pour $P, Q \in D_K$ on a $v(P-Q, 0) > v(P, 0)$ alors les facteurs fuchsiens de P et Q ont même polynôme indiciel.

THÉORÈME. *Soit* $P \in D_K$; *soient* $t_0 = 0 > t_1 > \dots > t_r$ *les valeurs exceptionnelles associées à* P, *posons* $s_i = N(P, t_i) - n(P, t_i)$ *(on a* $s_i > 0$*).*

1) *Soit* $Q \in D_K$, *avec* $\deg Q = \deg P$, *vérifiant*

$$v(P-Q, t_i) > v(P, t_i) - s_i t_i \qquad 0 \leqslant i \leqslant r. \tag{3.3.1}$$

Soit $P(\partial) = P_1(\partial-\eta_1) \dots P_q(\partial-\eta_q)$ *une décomposition de* P, *avec* $P_i \in D_L$ *fuchsiens et* $\eta_i \in L$ *vérifiant* $v(\eta_i-\eta_j) < 0$ *pour* $i \neq j, L = k((x^{1/p}))$ *étant une extension algébrique de* K. *Alors* Q *admet la décomposition*

$$Q(\partial) = Q_1(\partial-\eta_1) \dots Q_q(\partial-\eta_q)$$

où les $Q_i \in D_L$ *sont fuchsiens et* Q_i *et* P_i *ont même polynôme indiciel.*

2) *Soit* m *le plus grand entier* $\geqslant 0$ *tel qu'il existe deux racines* λ *et* μ *d'un même polynôme indiciel d'un des opérateurs fuchsiens* P_i *vérifiant* $|\lambda - \mu| = m$. *Si* $Q \in D_K$, *avec* $\deg Q = \deg P$, *vérifie*

$$(3.3.2) \qquad v(P-Q, t_i) > v(P, t_i) - s_i t_i + m \qquad 0 \leqslant i \leqslant r$$

on a

$$D_K/D_K Q \simeq D_K/D_K P .$$

3) *Si* $Q \in D_K$ *vérifie* (3.3.2), *il existe un sous-*D_K*-module* N *de* $D_K/D_K Q$ *tel que*

$$D_K/D_K Q \simeq D_K/D_K P \oplus N .$$

Démonstration :

1) $P_j(\partial)$ est le facteur fuchsien de $P(\partial+\eta_j)$. Ce que l'on doit vérifier est que $Q(\partial+\eta_j)$ possède un facteur fuchsien qui a même polynôme indiciel que P_j. Il suffit pour cela que l'on ait

$$(3.3.3) \qquad v\big(P(\partial+\eta_j)-Q(\partial+\eta_j), 0\big) > v\big(P(\partial+\eta_j), 0\big) .$$

Si $v(\eta_j) \geqslant 0$, (3.3.3) équivaut à la condition (3.3.1) pour $i = 0$.
Si $v(\eta_j) < 0$, alors $v(\eta_j)$ est une valeur exceptionnelle, soit $v(\eta_j) = t_i$. Mais alors en vertu des propriétés de la fonction de valuation

$$(3.3.4) \qquad \begin{aligned} v\big(P(\partial+\eta_j)-Q(\partial+\eta_j), 0\big) &\geqslant v\big(P(\partial+\eta_j)-Q(\partial+\eta_j), t_i\big) \\ &= v\big(P(\partial)-Q(\partial), t_i\big) . \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $n\big(P(\partial+\eta_j), t_i\big) \leqslant s_i$ (car cette inégalité est vraie dans le cas commutatif) d'où

$$(3.3.5) \qquad \begin{aligned} v\big(P(\partial+\eta_j), 0\big) &\leqslant v\big(P(\partial+\eta_j), t_i\big) - t_i n\big(P(\partial+\eta_j), t_i\big) \\ &\leqslant v\big(P(\partial), t_i\big) - t_i s_i . \end{aligned}$$

La conjonction de (3.3.1) (3.3.4) et (3.3.5) nous donne (3.3.3).
On a donc les facteurs de $Q : Q_1(\partial-\eta_1) \dots Q_q(\partial-\eta_q)$. Comme

$$\deg Q = \deg P = \sum_{i=1}^{q} \deg P_i = \sum_{i=1}^{q} \deg Q_i$$

il n'y a pas d'autres facteurs.

2) Pour déterminer complètement $D_L/D_L P$ il faut déterminer les $D_L/D_L P_j(\partial-\eta_j)$. Or d'après la théorie de Fuchs si

$$v(P_j(\partial) - Q_j(\partial), 0) > m \tag{3.3.6}$$

on a $D_L/D_L P_j \simeq D_L/D_L Q_j$. Mais comme, si l'on a choisi P_j et Q_j unitaires,

$$v(P_j(\partial) - Q_j(\partial), 0) \geqslant v(P(\partial + \eta_j) - Q(\partial + \eta_j), 0)$$

grâce à (3.3.4) et (3.3.5) on voit que (3.3.2) entraîne (3.3.6). Par conséquent on a $D_L/D_L P \simeq D_L/D_L Q$ et donc $D_K/D_K P \simeq D_K/D_K Q$.

3) Soit L une extension de K où l'on peut factoriser P et Q. Le raisonnement précédent nous montre qu'on a

$$Q(\partial) = Q_1(\partial - \eta_1) \dots Q_q(\partial - \eta_q) Q'(\partial)$$

et $D_L/D_L Q = \bigoplus_i D_L/D_L Q_i(\partial - \eta_i) \oplus D_L/D_L Q'$. (Comme on n'a pas fait l'hypothèse $\deg P = \deg Q$ on n'a pas nécessairement Q' constant). D'après 2)

$$D_L/D_L P \simeq \bigoplus_i D_L/D_L P_i(\partial - \eta_i) \simeq \bigoplus_i D_L/D_L Q_i(\partial - \eta_i)$$

d'où

$$D_L/D_L Q \simeq D_L/D_L P \oplus D_L/D_L Q' .$$

Mais comme $D_L/D_L Q \simeq D_K/D_K Q \underset{K}{\otimes} L$ et $D_L/D_L P \simeq D_K/D_K P \underset{K}{\otimes} L$, la décomposition précédente provient d'une décomposition du D_K-module $D_K/D_K Q$.

BIBLIOGRAPHIE

[Am] AMICE Y. *Les nombres p-adiques*. P.U.F. Collection Sup.

[Ax] AX J. Zeros of polynomials over local fields the Galois action. *J. of algebra 15* (1970) pp. 417-428.

[De] DELIGNE P. *Equations différentielles à points singuliers réguliers*. Lecture notes in Mathematics n° 163 1970.

[Dw] DWORK B. and P. ROBBA. On ordinary linear p-adic differential equations. *Trans. of the A.M.S. vol. 231 n° 1* (1977) pp. 1-46.

[Ge] GERARD R. et A. LEVELT. Invariants mesurant l'irrégularité. *Ann. Inst. Fourier 23 Fasc. 1* (1973) pp. 157-195.

[In] INCE E. L. *Ordinary differential equations*. Dover.

[Ka] KATZ N. Nilpotent connections and the monodromy theorem. *IHES Publ. Math. n° 39* (1970) pp. 176-232.

[La] LAZARD M. Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet. *IHES Publ. Math. n° 14* (1962) pp. 47-75.

[Le] LEVELT A. Jordan decomposition of a class of singular differential operators. *Arkiv for Mathematik 13* (1975) pp. 1-27.

[Ma 1] MALGRANGE B. Sur les points singuliers des équations différentielles. *L'Enseignement mathématique 20 (1-2)* (1974) pp. 147-176.

[Ma 2] —— Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularités irrégulières *(Preprint)*.

[Mn] MANIN J. Moduli fuchsiani. *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa ser. III 19* (1965) pp. 113-126.

[Ra] RAMIS J. P. Devissage Gevrey. *Astérisque (à paraître)*.

[Ro] ROBBA P. Lemme de Hensel pour les opérateurs différentiels. *Groupe d'étude d'analyse ultramétrique* 2^e^ *année* 1974/75 n° 16 11 p.

[Tu] TURITTIN H. L. Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point. *Acta Math. 93* (1965) pp. 27-66.

[Wa] WASOW W. *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*. Interscience Publishers.

(Reçu le 22 novembre 1979)

Philippe Robba

Université Paris XI
Département de Mathématiques
F-91405 Orsay Cedex

vide-leer-empty