

# 1.1. Une famille de polynômes

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Dans le troisième paragraphe, nous donnons la loi de décomposition des nombres premiers dans ces corps non galoisiens.

Enfin, dans le quatrième paragraphe, nous établissons les propriétés de divisibilité des nombres de classes annoncées au début en construisant des corps tchébychéviens dont les clôtures galoisiennes sont des extensions abéliennes non ramifiées de degré  $l$  de certains corps cycliques de degré  $l - 1$ . Les paragraphes 2, 3 et 4 sont essentiellement indépendants; seuls quelques lemmes établis au paragraphe 2 servent dans les paragraphes 3 et 4.

L'idée d'étudier les corps tchébychéviens m'a été donnée par Pierre Barrucand; les trois premiers paragraphes de ce travail ont été élaborés avec lui; je tiens à le remercier ici.

## 0) NOTATIONS

Nous désignons par  $n$  un nombre positif impair (dans les parties 2), 3) et 4) ce  $n$  sera supposé premier, nous poserons alors  $n = l$ ), par  $K$  le corps quadratique  $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$  où  $d$  est sans carré, par  $\delta$  le discriminant de  $K$  et par  $\xi$  et  $\bar{\xi}$  deux entiers conjugués (non rationnels) de  $K$  tels que  $\xi\bar{\xi} = M^n$  où  $M$  est un entier rationnel. Nous choisissons une racine  $n$ -ième de  $\xi$  que nous notons  ${}^n\sqrt{\xi}$  et nous posons  ${}^n\sqrt{\bar{\xi}} = M/n \sqrt{\bar{\xi}}$ ,  $\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ ,  $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$  et  $L = \mathbf{Q}(\omega, \sqrt{d(\omega^2 - 1)})$ . Pour tout entier positif  $k$ , nous posons

$$t_k = ({}^n\sqrt{\xi})^k + ({}^n\sqrt{\bar{\xi}})^k, \quad t^{(k)} = \zeta^k {}^n\sqrt{\xi} + \zeta^{-k} {}^n\sqrt{\bar{\xi}},$$

$T^{(k)} = \mathbf{Q}(t^{(k)})$ ,  $t = t^{(0)}$  et  $T = T^{(0)}$ . Nous désignons par  $N$  la clôture galoisienne de  $T$ . Enfin, si  $A$  est un anneau,  $A^n$  est le semi-groupe des puissances  $n$ -ièmes des éléments de  $A$  et  $A^*$  est le groupe des éléments inversibles de  $A$ .

## 1) ETUDE GÉNÉRALE

### 1.1. Une famille de polynômes

Pour tout entier positif  $k$ , nous désignons par  $T_k(X)$  le polynôme vérifiant  $T_k(e^z + e^{-z}) = e^{kz} + e^{-kz}$  (c'est-à-dire, à une légère modification

près, le  $k$ -ième polynôme de Tchébychev de 1ère espèce). On a  $T_0(X) = 2$ ,  $T_1(X) = X$  et  $T_k(X) = XT_{k-1}(X) - T_{k-2}(X)$ .

Posons  $P_k(X; M) = M^{k/2} T_k(X/\sqrt{M})$ . On vérifie que, pour  $k > 0$ , les  $P_k(X; M)$  sont des polynômes unitaires de degré  $k$  à coefficients entiers, que  $P_0(X; M) = 2$ , que  $P_1(X; M) = X$  et que  $P_k(X; M) = XP_{k-1}(X; M) - MP_{k-2}(X; M)$ .

LEMME 1.1.1. *Pour tout entier positif  $k$ , on a  $P_k(t; M) = t_k$ .*

*Démonstration.* Soit  $z$  un nombre complexe tel que  $e^z = \sqrt[n]{\xi}/\sqrt{M}$ , alors  $e^z + e^{-z} = t/\sqrt{M}$  et donc  $P_k(t; M) = M^{k/2} T_k(t/\sqrt{M}) = M^{k/2} (e^{kz} + e^{-kz}) = t_k$ .

Soit  $tr(\xi) = \xi + \bar{\xi}$ ; le lemme précédent appliqué avec  $k = n$  montre que  $P_n(t, M) - tr(\xi) = 0$ . De même, pour tout  $j$  on a  $P_n(t^{(j)}; M) - tr(\xi) = 0$ . On voit facilement que les  $t^{(j)}$  sont distincts deux à deux (car  $\xi$  n'est pas rationnel), ce sont donc les  $n$  racines de  $P_n(X; M) - tr(\xi)$ . De cela on déduit le lemme suivant:

LEMME 1.1.2.  *$\xi$  est une puissance  $n$ -ième dans  $K$  si et seulement si le polynôme  $P_n(X; M) - tr(\xi)$  admet une racine rationnelle qui permet très simplement de savoir si  $\xi$  est une puissance  $n$ -ième dans  $K$ . Enfin on a le critère d'irréductibilité suivant:*

PROPOSITION 1.1.3. *Le polynôme  $P_n(X; M) - tr(\xi)$  est irréductible si et seulement si, pour aucun diviseur premier  $l$  de  $n$ , le polynôme  $P_l(X; M^{n/l}) - tr(\xi)$  n'a de racines rationnelles.*

*Démonstration.* Notre polynôme est irréductible si et seulement si le corps  $T = \mathbf{Q}(t)$  est de degré  $n$  sur  $\mathbf{Q}$ . Mais,  $n$  étant impair,  $T$  est de degré  $n$  sur  $\mathbf{Q}$  si et seulement si  $K(\sqrt[n]{\xi})$  est une extension de degré  $n$  sur  $K$ . Cela équivaut à ce que, pour aucun diviseur premier  $l$  de  $n$ , le nombre  $\xi$  n'est une puissance  $l$ -ième dans  $K$ ; on conclut à l'aide du lemme précédent.

## 1. 2. Les corps tchebycheviens

DÉFINITION 1. 2. 1. Le corps  $T$  obtenu par le procédé précédent est dit tchebychevien si il est de degré  $n$  sur  $\mathbf{Q}$ . Dans ce cas on dira que  $T$  est le corps tchebychevien associé à  $\xi$  ou que  $\xi$  est un entier quadratique définissant le corps tchebychevien  $T$ .