2. La transformation de Mellin et son inverse

$\delta(s)$ étant le rectangle $x+r-is$, $x+r+is$, $x-r+is$, $x-r-is$, où $s > |y|$. Si γ est un des côtés du rectangle parallèle à l'axe imaginaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left| \int_\gamma \frac{F(w)}{w-z}\, dw \right|^2 \leqslant M^2 \int \frac{dv}{r^2+(v-y)^2} = M^2\pi/r\,.$$

Soit $I(s) = \int_{\sigma(s)} \frac{F(w)}{w-z}\, dw$, $\sigma(s)$ étant le segment $x-r+is$, $x+r+is$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|I(s)|^2 \leqslant \int_{x-r}^{x+r} |F(u+is)|^2\, du \int_{x-r}^{x+r} \frac{du}{(u-x)^2+(s-y)^2}$$

$$\leqslant \pi \int_{x-r}^{x+r} |F(u+is)|^2\, du\,,$$

en supposant $|s| \geqslant |y| + 1$. Par conséquent

$$\int_{|y|+1}^{\infty} (|I(s)|^2 + |I(-s)|^2)\, ds \leqslant 2\pi r\, M^2\,.$$

Il existe donc une suite (s_j) convergeant vers $+\infty$ et telle que $|I(s_j)|^2 + |I(-s_j)|^2$ tende vers 0 lorsque $j \to \infty$. On a donc $2\pi\, |F(z)| \leqslant 2\,\mathrm{M}\,(\pi/r)^{1/2} + |I(s_j)| + |I(-s_j)|$ pour tout j, d'où le résultat lorsque $j \to \infty$

2. La transformation de Mellin et son inverse

Transformation de Mellin. Si $T \in \mathscr{E}'_+$, soit T_1 une distribution à support compact sur $\mathbf{R}$ qui prolonge T. Il existe un entier $m \geqslant 0$ tel que T_1 soit d'ordre fini $\leqslant m$ (cf. [7] théorème 24, page 88). Par conséquent, la fonction de z donnée par $F(z) = \langle T_1, t_+^{z-1} \rangle$ est définie et holomorphe pour $\operatorname{Re} z > m + 1$ et elle ne dépend pas du prolongement T_1 de T choisi. En effet, d'une part l'application $z \mapsto t_+^{z-1}$ définit une fonction holomorphe pour $\operatorname{Re} z > m + 1$, à valeurs dans l'espace des fonctions de classe C^m sur $\mathbf{R}$; d'autre part, si T_2 est un autre prolongement de T, pour $\operatorname{Re} z$ assez grand, t_+^{z-1} est nul sur le support de $T_1 - T_2$ ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à l'ordre de $T_1 - T_2$ (cf. [7] théorème 28, page 93). La fonction F est appelée *transformée de Mellin* de T et notée $F = \mathfrak{M}T$.

PROPOSITION 2.1. *Si* $T \in \mathscr{E}'_+$, *on a* $DT \in \mathscr{E}'_+$ *et* $t^p T \in \mathscr{E}'_+$ *pour tout* $p \in \mathbf{C}$. *De plus*

$$\mathfrak{M}(DT)(z) = -z\mathfrak{M}T(z), \tag{2.1}$$

$$\mathfrak{M}(t^p T)(z) = \mathfrak{M}T(z+p). \tag{2.2}$$

Démonstration. Si $T \in \mathscr{E}'_+$, il est clair que $DT \in \mathscr{E}'_+$. Le lemme 1.2 et la proposition 1.5 montrent que $t^p T \in \mathscr{E}'_+$ si $p \in \mathbf{C}$.

Soit T_1 une distribution à support compact, d'ordre $\leqslant m$, qui prolonge T. Pour $\operatorname{Re} z > m + 2$, on a $z\mathfrak{M}T(z) = \langle T_1, zt_+^{z-1} \rangle = -\langle T_1', t_+^z \rangle = -\langle DT_1, t_+^{z-1} \rangle = -\mathfrak{M}(DT)(z)$, puisque DT_1 est un prolongement de DT.

Soit maintenant k un entier $\geqslant 0$ tel que $\operatorname{Re} p + k > m$. Alors t_+^{p+k} est de classe C^m et $t_+^{p+k} T_1$ est un prolongement de $S = t^{p+k} T$; on a donc, pour $\operatorname{Re} z > m + 1$, $\mathfrak{M}S(z) = \langle t_+^{p+k} T_1, t_+^{z-1} \rangle = \langle T_1, t_+^{z+p+k-1} \rangle = \mathfrak{M}T(z+p+k)$. En outre, $S = t^k t^p T$, de sorte que si T_2 est un prolongement de $t^p T$, $t^k T_2$ est un prolongement de S; par suite, pour $\operatorname{Re} z$ assez grand, $\mathfrak{M}S(z) = \langle t^k T_2, t_+^{z-1} \rangle = \langle T_2, t_+^{z+k-1} \rangle = \mathfrak{M}(t^p T)(z+k)$. Finalement, $\mathfrak{M}(t^p T)(z) = \mathfrak{M}S(z-k) = \mathfrak{M}T(z+p)$, c.q.f.d.

ALGÈBRE $\mathscr{E}'_+$. Si S et T appartiennent à $\mathscr{E}'_+$, on définit la convolution $S * T$ de S et T comme la distribution sur $\mathbf{R}_+$ donnée par

$$\langle S*T, \varphi \rangle = \langle S(s) \otimes T(t), \varphi(st) \rangle, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}_+). \tag{2.3}$$

C'est la convolution associée à la structure de groupe multiplicatif de $\mathbf{R}_+$. On a $S * T \in \mathscr{E}'_+$; en effet, si S_1 et T_1 sont des prolongements respectifs de S et T, $S*T$ est la restriction de $S_1 * T_1$ définie sur $\mathbf{R}$ par une formule analogue à (2.3). Muni de la convolution, $\mathscr{E}'_+$ est une algèbre commutative sur le corps $\mathbf{C}$.

ALGÈBRE $\mathscr{H}_+$. Nous considérerons des fonctions holomorphes définies dans des domaines du plan $\mathbf{C}$ contenant des demi-plans du type $\operatorname{Re} z > r$ ($r \in \mathbf{R}$). Deux telles fonctions seront identifiées si elles coïncident dans un tel demi-plan. Nous désignerons par $\mathscr{H}_+$ l'espace des (classes de) fonctions F du type précédent vérifiant une inégalité

$$|F(z)| \leqslant C(1+|z|)^m a^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Re} z > r, \tag{2.4}$$

où les constantes $C > 0$, $m \in \mathbf{Z}$, $a > 0$ et $r \in \mathbf{R}$ dépendent de F. $\mathscr{H}_+$ est une algèbre pour le produit $FG : z \to F(z)\,G(z)$, $F, G \in \mathscr{H}_+$.

Par exemple, si $T \in \mathscr{E}'_+$, la transformée de Mellin $F = \mathfrak{M}T$ de T appartient à $\mathscr{H}_+$. En effet, si le support de T est contenu dans $]0, a]$, il existe $f \in C^0_+$ nulle pour $t \geqslant a$ et $m \in \mathbf{N}$ tels que $T = f^{(m)}$ (proposition 1.5); par suite

$$\mathfrak{M}T(z) = (-1)^m (z-1)(z-2)\dots(z-m) \int_0^a f(t)\; t^{z-m-1}\, dt$$

vérifie (2.4) avec $r > m$.

On vérifie sans peine que $\mathfrak{M}$ est un homomorphisme de l'algèbre $\mathscr{E}'_+$ dans l'algèbre $\mathscr{H}_+$.

Transformation de Mellin inverse. Soit $F \in \mathscr{H}_+$ vérifiant (2.4). Si j est un entier $\geqslant 0$ tel que $j > m + 1$, posons pour $t > 0$

$$K_jF(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(s)} t^{-z} F(z)\, z^{-j}\, dz\,, \tag{2.5}$$

où $\gamma(s)$ désigne la droite $\operatorname{Re} z = s$ orientée dans le sens $\operatorname{Im} z$ croissant, avec $s > r$ (on peut supposer $r > 0$). Il est clair que K_jF est une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$ ne dépendant pas de $s > r$. D'autre part, si $x > r$,

$$2\pi\, t^x\, K_jF(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy \log t}\, F(x+iy)\,(x+iy)^{-j}\, dy\,,$$

où l'intégrale tend vers 0 lorsque $t \to +0$, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. Il s'ensuit que $t^x K_jF$ est continue sur $\overline{\mathbf{R}}_+$ si $x > r$. Enfin, d'après (2.4), $|K_j F(t)| \leqslant M(a/t)^x$ pour x assez grand, où M est une constante positive; par conséquent, en faisant tendre x vers l'infini, on obtient que $K_jF(t)$ est nul pour $t > a$ et $K_jF \in C^0_+$.

On définit donc un élément $\mathfrak{N}F$ de $\mathscr{E}'_+$ en posant, pour $j > m+1$,

$$\mathfrak{N}F = (-D)^j\, K_jF\,, \tag{2.6}$$

et $\mathfrak{N}F$ ne dépend pas de j puisque, en vertu de (2.5), $-DK_{j+1}F = K_jF$. La distribution $\mathfrak{N}F$ est appelée *transformée de Mellin inverse* de F et $\mathfrak{N}$ définit une application linéaire de $\mathscr{H}_+$ dans $\mathscr{E}'_+$.

D'après (2.5), $K_jF(t)$ est limite uniforme sur tout compact de $\mathbf{R}_+$ des fonctions

$$t \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{s-iA}^{s+iA} t^{-z} F(z)\, z^{-j}\, dz$$

lorsque A tend vers l'infini, avec $s > r$. Il en résulte que $\mathfrak{N}F$ est limite dans $\mathscr{D}'(\mathbf{R}_+)$ des fonctions continues

$$(2.7) \qquad t \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{s-iA}^{s+iA} t^{-z} F(z)\, dz\,,$$

lorsque A tend vers l'infini, $s > r$.

Proposition 2.2. *Si* $F \in \mathscr{H}_+$, *les fonctions* $z \mapsto zF(z)$ *et* $z \mapsto F(z+p)$, *avec* $p \in \mathbf{C}$, *appartiennent à* $\mathscr{H}_+$. *De plus*

$$(2.8) \qquad \mathfrak{N}[zF(z)] = -D\mathfrak{N}[F(z)]\,,$$

$$(2.9) \qquad \mathfrak{N}[F(z+p)] = t^p \mathfrak{N}[F(z)]\,, \quad p \in \mathbf{C}\,.$$

Démonstration. Il est clair que $\mathscr{H}_+$ est invariant par multiplication par z et par translation dans $\mathbf{C}$. Pour j assez grand, on a d'après (2.5)

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}[zF(z)] &= (-D)^{j+1} K_{j+1}[zF(z)] = (-D)^{j+1} K_j[F(z)] \\ &= -D\mathfrak{N}[F(z)]\,. \end{aligned}$$

Pour k et j assez grands, on a de même

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}[F(z)] &= (-D)^k K_k[F(z)] = (-D)^k (-D+p)^j K_k[(z+p)^{-j} F(z)] \\ &= (-D+p)^j K_0[(z+p)^{-j} F(z)]\,, \end{aligned}$$

et par suite

$$\mathfrak{N}[F(z+p)] = (-D+p)^j K_0[(z+p)^{-j} F(z+p)]\,,$$

d'où, en faisant le changement de variable $z + p \mapsto z$ dans l'intégrale (2.5) donnant K_0,

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}[F(z+p] &= (-D+p)^j (t^p K_j[F(z)]) \\ &= t^p (-D)^j K_j[F(z)] = t^p \mathfrak{N}[F(z)]\,, \end{aligned}$$

c.q.f.d.

Théorème 2.3. *La transformation de Mellin* $\mathfrak{M}$ *est un isomorphisme de l'algèbre* $\mathscr{E}'_+$ *sur l'algèbre* $\mathscr{H}_+$ *d'inverse* $\mathfrak{N}$.

Démonstration. On sait déjà que $\mathfrak{M} : \mathscr{E}'_+ \to \mathscr{H}_+$ est un homomorphisme.

Montrons que $\mathfrak{N}\mathfrak{M}$ est l'identité sur $\mathscr{E}'_+$. Si $T \in \mathscr{E}'_+$, on a $T = (-D)^m (t^{-q} f)$ avec m et $q \in \mathbf{N}$ et $f \in C^0_+$ (proposition 1.5). Par suite (proposition 2.1), $\mathfrak{M}T(z) = z^m \mathfrak{M}f\,(z-q)$ et (proposition 2.2) $\mathfrak{N}\mathfrak{M}T = (-D)^m (t^{-q}\,\mathfrak{N}\mathfrak{M}f)$. Il suffit donc de vérifier que $\mathfrak{N}\mathfrak{M}f = f$ pour $f \in C^0_+$. Mais alors $\mathfrak{M}f$ satisfait à l'inégalité (2.4) avec $m = 0$ et $\mathfrak{N}\mathfrak{M}f = D^2 K_2 M f$, c'est-à-dire, avec $x > 0$,

$$2\pi\,\mathfrak{N}\mathfrak{M}f = D^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^{-x-iy}\,\frac{\mathfrak{M}f\,(x+iy)}{(x+iy)^2}\,dy$$

$$= D^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_0^\infty \frac{t^{-x-iy}\,s^{x+iy-1}}{(x+iy)^2} f\,(s)\,ds\,,$$

intégrales absolument convergentes. En intégrant d'abord par rapport à y on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (s/t)^{x+iy}\,\frac{dy}{(x+iy)^2} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad s \leqslant t\,, \\ \log\,(s/t) & \text{si} \quad s \geqslant t\,. \end{cases}$$

On a donc $\mathfrak{N}\mathfrak{M}f = D^2 \int_t^\infty \log\,(s/t)\,f\,(s)\,s^{-1}\,ds = f$.

Montrons que $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ est l'identité sur $\mathscr{H}_+$. Si $F \in \mathscr{H}_+$, on a $F(z) = z^m G(z)$ où G est holomorphe pour $\operatorname{Re} z > r$ et

$$|\,G(z)\,| \leqslant C\,(1+|z|)^{-2}\,a^{\operatorname{Re} z}\,, \qquad \operatorname{Re} z > r\,,$$

C, a et $r > 0$, $m \in \mathbf{N}$. Il s'ensuit que $\mathfrak{N}F = (-D)^m\,\mathfrak{N}G$ et $\mathfrak{M}\mathfrak{N}F = z^m\,\mathfrak{M}\mathfrak{N}G$ (propositions 2.2 et 2.1), d'où le résultat si $\mathfrak{M}\mathfrak{N}G = G$. Or $\mathfrak{N}G\,(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(u)} t^{-z}\,G\,(z)\,dz$, $\gamma\,(u)$ droite $\operatorname{Re} z = u$ avec $u > r$. Par suite, $\mathfrak{N}G\,(t) = t^{-u}\,g\,(t)$ avec $2\pi g\,(t) = \int t^{-iv}\,G\,(u+iv)\,dv$. On a $g \in C^0_+$, supp $g \subset\,]0, a]$ d'où

$$\mathfrak{M}\mathfrak{N}G\,(z) = \int_0^a t^{z-u-1}\,g\,(t)\,dt\,.$$

Pour $x > u > r$ on a donc

$$\mathfrak{M}\mathfrak{N}G\,(x+iy) = \int_0^a t^{x+iy-u-1}\,g\,(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^a dt \int_{-\infty}^{+\infty} t^{x+iy-u-iv-1}\;G\,(u+iv)\,dv$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^{x+iy-u-iv}}{x+iy-u-iv}\,G\,(u+iv)\,dv$$

$$= \text{résidu au point } z \text{ de la fonction } w \mapsto \frac{G(w)\, a^{z-w}}{w-z}$$
$$= G(x+iy)\,.$$

Remarques. 1) Il résulte de ce qui précède que si $T \in \mathscr{E}'_+$ et $F = \mathfrak{M}T \in \mathscr{H}_+$, le support de T est contenu dans $]0, c]$ si et seulement si F vérifie une inégalité (2.4) avec $a = c$.

2) Si T est la restriction à $\mathbf{R}_+$ d'une distribution d'ordre $\leqslant n$ sur $\mathbf{R}$, F vérifie (2.4) avec $m = n$. Inversement si F vérifie (2.4), $T = (-D)^{m+2} K_{m+2} F$ est d'ordre $\leqslant m+2$. Des résultats plus précis seront obtenus au paragraphe suivant.

Etant donné une distribution T sur $\mathbf{R}_+$, on désigne par T_a l'homothétique de T dans le rapport $a > 0$; avec la notation fonctionnelle, on a $T_a(t) = T(a^{-1}t)$. De même T^a est la distribution définie par $T^a(t) = T(t^a)$. On démontre sans difficulté la proposition suivante:

Proposition 2.4. *Soit* $a > 0$. *Si* $F \in \mathscr{H}_+$ *les fonctions* $a^z F(z)$, $F\left(\dfrac{z}{a}\right)$ *et* $F'(z)$ *appartiennent aussi à* $\mathscr{H}_+$. *Si* $T \in \mathscr{E}'_+$, *les distributions* T_a, T^a *et* $(\log t)\, T$ *appartiennent aussi à* $\mathscr{E}'_+$ *et l'on a*

$$\mathfrak{M}T_a(z) = a^z\, \mathfrak{M}T(z)\,, \qquad \mathfrak{M}T^a(z) = \frac{1}{a}\, \mathfrak{M}T\left(\frac{z}{a}\right),$$
$$\mathfrak{M}\left[(\log t)\, T\right](z) = \frac{d}{dz}\, \mathfrak{M}T(z)\,.$$

Exemples. 1) La mesure de Dirac δ_1 au point 1 est l'unité de l'algèbre $\mathscr{E}'_+$. $\mathfrak{M}\delta_1 = 1$ est l'unité de l'algèbre $\mathscr{H}_+$.

2) Dans $\mathscr{H}_+$, la multiplication par $-z$ est un opérateur inversible dont l'inverse est la multiplication par $-z^{-1}$. On en déduit que l'opérateur différentiel D dans $\mathscr{E}'_+$ admet un inverse D^{-1} qui est la convolution par $\mathfrak{N}(-z^{-1}) = -\theta$, avec $\theta(t) = 1$ si $0 < t < 1$ et $= 0$ si $t \geqslant 1$. En fait $D^{-1} f$ est la primitive de $t^{-1} f$ à support borné.

3) Plus généralement, $P(z) = c\,(z-z_1)^{n_1} \ldots (z-z_k)^{n_k}$ étant un polynôme de degré $m = n_1 + \ldots + n_k \geqslant 1$ à zéros $z_1, \ldots, z_k$ distincts, la multiplication par $P(-z)$ dans $\mathscr{H}_+$ est un opérateur d'inverse $P(-z)^{-1}$. Par transformation de Mellin inverse, on en déduit que l'opérateur différentiel $P(D)$ est inversible dans $\mathscr{E}'_+$: $P(D)^{-1}$ est la convolution par

$$(-1)^m c^{-1} \theta_{z_1,n_1} * \ldots * \theta_{z_k,n_k},$$

où $\theta_{w,n} = (-1)^{n-1} t^w (\log t)^{n-1} \theta/(n-1)!$ est la transformée de Mellin inverse de la fonction $z \mapsto (z+w)^{-n}$.

3. Théorèmes du type de Paley-Wiener

Théorème 3.1. *Soit* $F \in \mathscr{H}_+$.

1) *F est la transformée de Mellin d'une distribution à support dans $[a^{-1}, a]$ $(a \geqslant 1)$ si et seulement si F est entière et vérifie une inégalité*

$$|F(z)| \leqslant C(1+|z|)^m a^{|\mathrm{Re}\, z|}, \qquad z \in \mathbf{C}, \tag{3.1}$$

avec $m \in \mathbf{N}$ et $C > 0$.

2) *F est la transformée de Mellin d'une fonction C^∞ à support dans $[a^{-1}, a]$ $(a > 1)$ si et seulement si F est entière et, pour tout $m \in \mathbf{N}$, il existe $C_m > 0$ tel que*

$$|F(z)| \leqslant C_m (1+|z|)^{-m} a^{|\mathrm{Re}\, z|}, \qquad z \in \mathbf{C}. \tag{3.2}$$

Démonstration. (Voir aussi [6], pages 3 à 13, [7], théorème 16, page 272 et [3], théorème 1.7.7, page 21).

1) Soit T une distribution sur $\mathbf{R}$ à support dans $[a^{-1}, a]$. Il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que T soit d'ordre $\leqslant m$ et

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant M \sum_{j=0}^{m} \sup_t |\varphi^{(j)}(t)| \tag{3.3}$$

pour tout $\varphi \in C^m(\mathbf{R}_+)$, avec $M > 0$. Soit $\chi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$ égale à 1 au voisinage de $[a^{-1}, a]$. On a $F(z) = \langle T, t^{z-1}\chi \rangle$ et F est entière. Soit $\psi \in C^\infty(\mathbf{R})$ nulle pour $t \geqslant 3$ et égale à 1 pour $t \leqslant 2$. Posons

$$\varphi_z(t) = \chi(t)\, \psi(t^{|z|} a^{-|z|})\, \psi(t^{-|z|} a^{-|z|})\, t^{z-1}.$$

On a $\varphi_z \in C^\infty(\mathbf{R})$, et comme $\varphi_z(t) = t^{z-1}$ au voisinage du support de T, $F(z) = \langle T, \varphi_z \rangle$. D'après (3.3), en majorant les dérivées de φ_z, on obtient (3.1).

Soit F entière vérifiant (3.1). On a $F = \mathfrak{M}T$ avec $T = \mathfrak{N}F = (-D)^{m+2} g_{\pm}$, où