I.1. Singularités des courbes planes et revêtements

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

tant qu'éléments de $K[X]$ [AC, VII, §3, n° 5, th. 2], ou encore si et seulement si leurs facteurs irréductibles (= éléments extrémaux) sont non équivalents deux à deux [A, VI, §1, n° 12, prop. 11 (DIV) et AC, VII, §3, n° 2, th. 1], ou enfin si et seulement si leur *résultant n'est pas nul* dans A (donc est inversible dans K); cette dernière affirmation est à un oubli de détail près le lemme 3 de l'appendice III de [7]. De même, les facteurs irréductibles de P sont non équivalents entre eux si et seulement si son discriminant n'est pas nul; on dit alors que P est *sans facteur multiple.*

Soient B un second anneau intègre et $\varphi: A \to B$ un homomorphisme appliquant 1 sur 1; nous désignons par la même lettre l'homomorphisme $A[X] \to B[X]$. Si Res (,) et Dis ( ) dénotent respectivement le résultant et le discriminant, il convient d'insister sur la propriété suivante, qui est très utile malgré sa banalité:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathrm{Res}(P, Q)) &= \mathrm{Res}(\varphi(P), \varphi(Q)) \\ \varphi(\mathrm{Dis}(P)) &= \mathrm{Dis}(\varphi(P)) . \end{aligned}$$

Le cas le plus fréquent ci-dessous est celui ou $A = \mathcal{O}(D)$ est l'anneau des fonctions holomorphes sur un polycylindre D de $\mathbf{C}^k$ centré à l'origine, où $B = {}_k\mathcal{O}$ et où $\varphi: f \mapsto \underline{f}$ est l'injection canonique. Précisons à ce sujet que tous les *polycylindres* du texte sont *ouverts.*

Le travail du premier auteur a été rendu possible par le Fonds national suisse de la recherche scientifique.

I. COURBES PLANES

I.1. Singularités des courbes planes et revêtements

Soit $\underline{\gamma}$ un *germe de courbe plane.* On peut toujours supposer $\underline{\gamma}$ donné par les zéros d'un polynôme de Weierstrass (quitte à opérer un changement linéaire de coordonnées). Plus précisément, il existe

1°) Un polycylindre D_2 dans $\mathbf{C}^2$, centré à l'origine; nous noterons D_1 sa trace sur la droite $\mathbf{C} = \mathbf{C}_x$ de $\mathbf{C}^2 = \mathbf{C}^2_{xy}$.

2°) Un polynôme de Weierstrass $f \in \mathcal{O}(D_1)[y]$ de degré n, c'est-à-dire une fonction $f \in \mathcal{O}(D_2)$ avec

$$f(x, y) = y^n + a_1(x) y^{n-1} + \ldots + a_n(x)$$

pour tout $(x, y) \in D_2$, où les a_j sont des fonctions holomorphes dans D_1 qui s'annulent à l'origine.

Le germe $\underline{\gamma}$ est alors représenté par $\gamma_D = \{(x, y) \in D_2 \mid f(x, y) = 0\}$. Nous écrirons plus simplement γ si $D_2 = \mathbf{C}^2$. On peut toujours remplacer D_2 par un polycylindre plus petit; en particulier, on pourra toujours supposer que la projection canonique fournit par restriction une application π de γ_D *sur* D_1. Si $n = 1$, le changement de coordonnées $(x, y) \mapsto (x, y - a(x))$ montre que γ_D est lisse à l'origine; nous supposerons désormais $\underline{n \geqslant 2}$ (on prendra garde que ceci n'exclut pas tous les germes lisses, comme le montre le cas de $f(x, y) = y^2 - x$).

PROPOSITION 1. Soit $\underline{\gamma}$ un germe donné comme ci-dessus. Alors la projection canonique de $\mathbf{C}^2$ sur $\mathbf{C}$ induit (après rétrécissement éventuel de D_2) un *revêtement* holomorphe à n feuilles

$$\pi^*: \gamma_D^* = \gamma_D - \{(0, 0)\} \to D_1^* = D_1 - \{0\}$$

Preuve. Le discriminant Dis (f) est un élément de $\mathcal{O}(D_1)$. Notons Ev: $\mathcal{O}(D_1) \to \mathbf{C}$ le morphisme d'évaluation $g \mapsto g(0)$; alors Ev (Dis (f)) $=$ Dis (Ev (f)). Or Ev $(f) = y^n$ est un polynôme qui a par hypothèse $(n \geqslant 2)$ une racine multiple et son discriminant est nul. Par suite Dis (f) s'annule à l'origine.

On peut supposer que le germe à l'origine $\underline{f}$ de f est sans facteur multiple, de sorte que Dis $(\underline{f})$ n'est pas nul. Mais Dis $(\underline{f})$ est le germe de Dis (f). Par suite la fonction Dis (f) n'est pas nulle, ses zéros sont isolés, et on peut supposer (après rétrécissement de D_2 au besoin) que Dis (f) ne s'annule pas dans D_1^*.

Soient $a \in D_1^*$ et Ev_a: $\mathcal{O}(D_1) \to \mathbf{C}$ l'évaluation $g \mapsto g(a)$. Comme Dis $(\mathrm{Ev}_a(f)) = \mathrm{Ev}_a$ (Dis (f)) $\neq 0$, le polynôme $y \mapsto f(a, y)$ n'a pas de racine double; en d'autres termes $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, y) \neq 0$ si $(a, y) \in \gamma_D^*$. Par suite la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{O}(D_2)$ ne s'annule pas sur γ_D^*. Le théorème des fonctions implicites affirme dans cette situation que γ_D^* est une courbe lisse et que π^* est un isomorphisme analytique local. Ses fibres ayant toutes le même nombre n d'éléments, c'est de plus un revêtement. ■

COROLLAIRE. Les singularités des courbes planes sont isolées.

PROPOSITION 2. On suppose $\underline{f}$ sans facteur multiple. Alors $\underline{f}$ est *réductible* si et seulement s'il existe un polycylindre D_2 tel que $\underline{f}$ ait un représentant $f \in \mathcal{O}(D_2)$ avec γ_D^* *non connexe.*

Preuve. Supposons $\underline{f} = \underline{f}' \, \underline{f}''$, avec $\underline{f}'$ et $\underline{f}''$ des polynômes de Weierstrass non constants et sans facteur commun; leur résultant est donc un élément non nul de ${}_1\mathcal{O}$. On peut choisir un polycylindre D_2 et des représentants f_D' et f_D'' de $\underline{f}'$ et $\underline{f}''$ tels que le résultant de f_D' et f_D'' soit une fonction de $\mathcal{O}(D_1)$ sans zéro dans D_1^*. Un argument déjà utilisé dans la preuve de la proposition 1 montre alors que f_D' et f_D'' n'ont pas de zéro commun dans $D_2 - \{(0, 0)\}$. Par suite les ensembles

$$\gamma' = \{ (x, y) \in D_2 \mid f_D'(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0 \}$$

et

$$\gamma'' = \{ (x, y) \in D_2 \mid f_D''(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0 \}$$

forment une partition en fermés non vides de γ_D^*, qui n'est donc pas connexe.

Supposons réciproquement qu'il existe un polycylindre D_2 tel que l'espace total du revêtement associé $\pi^* \colon \gamma_D^* \to D_1^*$ admette une partition en deux fermés non vides: $\gamma_D^* = \gamma' \cup \gamma''$. Par la proposition 1, le cardinal n' de $\gamma' \cap \pi^{-1}(x)$ ne dépend pas du choix de x dans D_1^*. Soient $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ les zéros de la fonction $y \mapsto f(x, y)$, numérotés de telle sorte que $\varphi_j(x) \in \gamma'$ pour $j \leqslant n'$. Posons

$$f'(x, y) = \prod_{j=1}^{n'} (y - \varphi_j(x)) \quad \text{et} \quad f''(x, y) = \prod_{j=n'+1}^{n} (y - \varphi_j(x))$$

pour tout $(x, y) \in D_2$. Les φ_j ne sont en général *pas* holomorphes (seules leurs fonctions symétriques élémentaires le sont). Il résulte néanmoins de la proposition 1 que, pour tout disque $\Delta_1 \subset D_1^*$, on peut faire en sorte que les φ_j soient holomorphes dans Δ_1. Par suite, f' et f'' sont holomorphes au voisinage de tout point (x, y) avec $x \neq 0$, donc dans tout D_2 par le théorème d'extension de Riemann. En d'autres termes $\underline{f} = \underline{f}' \, \underline{f}''$ est réductible. ■

PROPOSITION 3. Supposons $\underline{f}$ irréductible. Alors il existe un nombre positif r et une fonction holomorphe φ dans $D(r) = \{t \in \mathbf{C} \mid |t| < r\}$ tels que $\begin{cases} D(r) \to \gamma_D \\ t \mapsto (t^n, \varphi(t)) \end{cases}$ soit un homéomorphisme.

Preuve. Avec les notations de la proposition 1, soient s le rayon de D_1 et r la racine positive n-ième de s. Notons $D(r)^*$ le disque $D(r)$ privé de l'origine. Les applications $t \mapsto t^n$ de $D(r)^*$ sur D_1^* et $(x, y) \mapsto x$ de γ_D^* sur D_1^* sont des revêtements holomorphes (proposition 1) connexes (proposition 2) à n feuilles de l'espace D_1^* à groupe fondamental abélien. Il existe donc un isomorphisme analytique Φ^* rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} D(r)^* \arrow[rr, "\Phi^*"] \arrow[dr] & & \gamma_D^* \arrow[dl, "\pi^*"] \\ & D_1^* & \end{tikzcd}$$

commutatif. Comme Φ^* est borné, il se prolonge par continuité en un morphisme bijectif $\Phi\colon D(r) \to \gamma_D$ de la forme $t \mapsto \big(t^n, \varphi(t)\big)$ avec $\varphi \in \mathcal{O}\big(D(r)\big)$. C'est alors un exercice facile de topologie générale de montrer que Φ est un homéomorphisme. ■

Corollaire. Les courbes planes irréductibles sont des *variétés topologiques.*

Notons qu'une courbe plane (plus généralement une sous-variété de $\mathbf{C}^k$) analytiquement singulière n'est jamais une variété différentiable; voir par exemple [14], §2.

La proposition 3 exprime γ_D paramétriquement par $x = t^n$ et

$$y = \varphi(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m+1} + \ldots + a_k t^{m+k} + \ldots (a_0 \neq 0)\,;$$

on montre facilement qu'on ne restreint pas la généralité en supposant $m \geqslant n$. On écrit aussi

$$y = a_0 x^{m/n} + a_1 x^{(m+1)/n} + \ldots + a_k x^{(m+k)/n} + \ldots$$

et on parle alors du *développement de Puiseux* ou de la *série fractionnaire* associé au germe considéré.

I.2. Les tangentes en un point d'une courbe plane

Soient k un entier positif et $\mathrm{Ev}\colon {}_k\mathcal{O} \to \mathbf{C}$ l'évaluation à l'origine, qui n'est autre que la projection canonique de l'anneau local ${}_k\mathcal{O}$ sur son corps résiduel.

Proposition 4. L'anneau local ${}_k\mathcal{O}$ est *hensélien.* En d'autres termes, soient $P \in {}_k\mathcal{O}\,[t]$ un polynôme unitaire et $\rho, \sigma \in \mathbf{C}\,[t]$ des polynômes unitaires étrangers tels que $\mathrm{Ev}\,(P) = \rho\,\sigma$. Alors il existe des polynômes unitaires R et S dans ${}_k\mathcal{O}\,[t]$ avec $P = RS$, $\mathrm{Ev}\,(R) = \rho$ et $\mathrm{Ev}\,(S) = \sigma$.

Attention : P n'est pas nécessairement un polynôme de Weierstrass.