§1. Solution presque-périodiques de l'équation $\left(\frac{d}{dt}-A \right)u = 0$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nous étudions la presque-périodicité des fonctions $u(t)$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{X}$, vérifiant une équation différentielle

$$u'(t) = Au(t) + f(t)$$

A étant un opérateur linéaire de domaine $\mathscr{D}(A)$ dans l'espace $\mathscr{X}$, alors que $f(t)$ est identiquement nulle ou bien est une fonction presque-périodique. En fait, une partie des résultats est valable dans les espaces de Hilbert seulement, en particulier les théorèmes du § 4 concernant les solutions faibles minimales.

Un autre groupe de résultats (Th. 2.1, 2.2, 3.1, 3.2) porte sur l'équivalence entre les solutions à trajectoire bornée ou relativement compacte et les solutions presque-périodiques; l'origine de ce genre de théorème remonte à Bohr-Neugebauer et Bochner (consulter la Bibliographie, par exemple [1], [5], [12], [13]).

§ 1. Solution presque-périodiques de l'équation $\left(\frac{d}{dt} - A\right) u = 0$

Au début nous allons considérer le cas de l'équation

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$$

dans un espace de Banach $\mathscr{X}$, A étant un opérateur linéaire continu de $\mathscr{X}$ en lui-même, et $x(t)$ une fonction continûment différentiable, de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{X}$. Dans ce cas, toute solution s'écrit sous la forme

$$x(t) = U(t)x(0),$$

$U(t)$ étant défini comme exponentielle [1]):

$$U(t) = e^{At} = I + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + \dots \frac{t^nA^n}{n!} + \dots$$

Nous posons la définition suivante (selon [6]):

Définition 1.1. L'espace de Banach $\mathscr{X}$ est parfait si les conditions

$x(t)$ bornée de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{X}$

$x'(t)$ presque périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{X}$

entraînent

$x(t)$ est presque-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{X}$.

---

[1]) Voir [7], [8], [9].

On a ici le résultat suivant ([6]):

THÉORÈME 1.1. *Soit A un opérateur linéaire compact dans l'espace de Banach parfait $\mathscr{X}$. Supposons aussi que*

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \| e^{At} \| < \infty .$$

Alors, toute solution $x(t)$ de l'équation $x'(t) = Ax(t)$ est presque-périodique.

Démonstration. Vu que $x(t) = e^{At} x(0)$, il suit que toute solution est bornée. Par suite, l'ensemble $\{ Ax(t) \}_{t \in \mathbf{R}}$ est relativement compact dans $\mathscr{X}$, et donc l'ensemble $\{ (x'(t) \}_{t \in \mathbf{R}}$ a la même propriété.

Il est bien connu (voir [1], [2], [5]) qu'une fonction continue $f(t)$, $t \in \mathbf{R}$ dans un espace de Banach est presque périodique si et seulement si toute suite de réels $(h_n)_1^\infty$ contient une sous-suite $(h_{n_p})_1^\infty$, telle que la suite de fonctions $\left(f(t+h_{n_p})\right)_1^\infty$ soit de Cauchy dans la convergence forte de $\mathscr{X}$, uniforme pour $t \in \mathbf{R}$.

Nous appliquons ce résultat pour déduire la presque-périodicité de $x'(t)$ (et donc de $x(t)$, vu que $\mathscr{X}$ est parfait). Nous pouvons trouver une suite partielle $(h_{n_p})_1^\infty$ de façon que la suite $\{ x'(h_{n_p}) \}_1^\infty$ soit de Cauchy dans $\mathscr{X}$. On a ensuite:

$$\begin{aligned} x'(t+h_{n_p}) &= A\,x(t+h_{n_p}) \\ &= Ae^{A(t+h_{n_p})}\,x(0) = Ae^{At}\,e^{Ah_{n_p}}\,x(0) = Ae^{At}\,x(h_{n_p}) \\ &= e^{At}\,Ax(h_{n_p}) = e^{At}\,x'(h_{n_p}) . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \| x'(t+h_{n_p}) - x'(t+h_{n_q}) \| &= \| e^{At}(x'(h_{n_p}) - x'(h_{n_q})) \| \\ &\leqslant \sup_{-\infty<t<\infty} \| e^{At} \| \; \| x'(h_{n_p}) - x'(h_{n_q}) \| \end{aligned}$$

Cela prouve le résultat voulu.

§ 2. Presque-périodicité des solutions bornées

On considère l'équation non-homogène,

$$x'(t) = Ax(t) + f(t)$$

dans un espace de Hilbert. On a premièrement le résultat suivant (voir par exemple [13]).